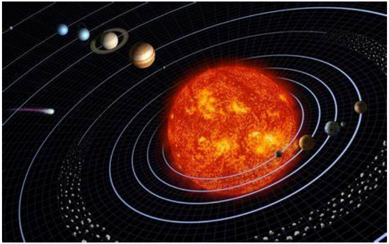
General Relativity

§15 Test Particle in Schwarzschild Metric

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/gr

这一讲我们讨论 ~~地球为什么绕着太阳转~~ Schwarzschild 度规下的测试粒子的运动。



守恒动量

设度规的协变形式不依赖于某个坐标分量 x^α，即 $g_{\mu\nu,\alpha} = 0$ 处处成立，证明沿测地线运动的自由粒子的四维动量的协变分量 p_α 守恒。

史瓦西度规里的测试粒子的基本方程

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$p_t = E$$

$$p_\phi = L$$

$$p^\mu p_\mu = m^2$$

考虑在史瓦西度规

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

中运动的测试粒子。记其四维动量为 p^μ。

取粒子运动所在的三维平面为

$$\theta = \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

度规

$$\mathrm{diag}\left(1-\frac{2GM}{r}, -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}, -r^2, -r^2\sin^2\theta\right)$$

和 t, ϕ 无关，所以四维动量的协变分量 p_t，p_ϕ 均守恒，它们在牛顿力学里都有个响亮的名号： p_t 是能量（这里比牛顿力学多包含了静止质量）， p_ϕ 是角动量。我们记

$$p_t = E \tag{2}$$

$$p_\phi = L \tag{3}$$

最后，按照静止质量的定义

$$p^\mu p_\mu = m^2 \tag{4}$$

前面的四个方程已经可以完备地描述粒子的运动。

就是那么简单，甚至不用算联络！

静质量非零粒子的运动

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = q^2 + 3u^2$$

对静止质量 $m > 0$ 的粒子，我们研究的基本对象是变量

$$u \equiv \frac{GM}{r}$$

随着方位角 ϕ 的变化。

这个神奇的变量 u 是从牛顿引力理论里学来的，别问，再问就拿苹果砸你......

Eq. (2) 可以写成

$$(1 - 2u)\frac{dt}{ds} = \varepsilon \tag{5}$$

这里的 $\varepsilon \equiv \frac{E}{m}$ 是单位质量对应的能量。在自然单位制下，它是无量纲量。

Eq. (3) 可以写成

$$r^2\frac{d\phi}{ds} = \ell \tag{6}$$

这里的 $\ell \equiv \frac{L}{m}$ 是单位质量对应的角动量，它具有长度量纲。由于 GM 也是长度量纲，我们自然可以引入一个无量纲量：

$$q \equiv \frac{GM}{\ell} \tag{7}$$

对太阳系的行星而言，这个量都远小于 1。对于近圆轨道，q^2是太阳的 GM（约1.5公里）和行星公转轨道半径之比。

利用 Eq. (5)和 Eq. (6)，Eq. (4) 可以写成

$$(1-2u)\left(\frac{\varepsilon}{1-2u}\right)^2 - \frac{1}{1-2u}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{\ell^2}{r^2} = 1 \qquad (8)$$

再次利用 Eq. (6)，把上式中的 $\frac{dr}{ds}$ 替换为 $\frac{dr}{d\phi}$

$$\varepsilon^2 - \left(\frac{dr}{d\phi}\frac{\ell}{r^2}\right)^2 - (1-2u)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right) = 0 \qquad (9)$$

上式两边乘以 q^2，得到

$$\varepsilon^2 q^2 - \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - (1-2u)\left(q^2+u^2\right) = 0 \qquad (10)$$

两边对 ϕ 求导，得到

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = q^2 + 3u^2 \qquad (11)$$

最后这个方程是推广了的Binet公式：

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=q^2+3u^2}$$

在牛顿近似下 $|u|\ll 1$，所以我们暂且忽略掉方程右边的 $3u^2$，得到

$$u(\phi)\approx u_0(\phi)=q^2(1+e\cos\phi) \tag{12}$$

这里 e 是任意常数。扎实的幼儿园基础告诉我们，Eq. (12) 里的 $u_0(\phi)$ 其实就是牛顿行星理论里的圆锥曲线。

因为 ϕ 的零点可以随便选取，所以我们忽略了 Eq. (12) 里的 ϕ 可能带有的常数相位。

近圆轨道的修正

我们来考虑水星进动的问题。这对应离心率 e 很小的情况。
我们来考虑形如

$$u = Aq^2 \left[1 + e\cos\left(\frac{\phi}{B}\right)\right]$$

的解，这里的 A, B 均很接近于1。代入相对论 Binet 公式，并忽略最高阶的 q^4e^2 小项

$$Ae\left(1 - \frac{1}{B^2} - 6Aq^2\right)\cos\left(\frac{\phi}{B}\right) = 1 + 3A^2q^2 - A$$

保留最低阶修正

$$A \approx 1 + 3q^2, B \approx 1 + 3q^2$$

水星进动(Mercury Perihelion Shift)

于是广义相对论预言的轨道，相对于牛顿理论有两种修正：轨道半长轴被缩短 $1+3q^2$ 倍，$u(\phi)$ 的周期被增大 $1+3q^2$ 倍。

对太阳系而言，由于半长轴的缩短和太阳质量是简并的，除非我们有不借助于行星运动的方法测量太阳质量，否则就无法验证这个效应。

$u(\phi)$ 周期偏离 2π，即每运行一周多出 $6\pi q^2$，可以通过观测行星近日点方位的变化得到。
我们来看一下水星：太阳的 GM 大约是1.5公里，水星的轨道半径约为5.6千万公里，于是 $6\pi q^2 \approx 5.0\times 10^{-7}$。水星的公转周期是0.24年。每百年由广义相对论修正引起的进动为：$5\times 10^{-7}\times \frac{100}{0.24} = 2.1\times 10^{-4}$——这正是广义相对论提出之前天文学家们苦苦思索不得的“多余的 43 角秒”。

零质量粒子的运动

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3u^2$$

对零质量粒子，$p^\mu p_\mu = 0$ 可以写成

$$(p^r)^2 = E^2 - \frac{(1-2u)u^2L^2}{G^2M^2} \tag{13}$$

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{G^2M^2(p^r)^2}{L^2} = q^2 - (1-2u)u^2 \tag{14}$$

我们这里定义类和静止质量非零时类似的一个量

$$q \equiv \frac{GME}{L}$$

然后两边对 ϕ 求导，得到

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3u^2$$

所以零质量粒子的相对论版 Binet 公式为:

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3u^2}$$

我们仍然只考虑 u 很小的情况。

先忽略方程右边的 $3u^2$ 得到的解为

$$u \approx q \cos\phi$$

这里的 $|q| \ll 1.$

因为 ϕ 的零点可以随便选取，所以我们忽略了ϕ 可能带有的常数相位。

这显然是一条直线的方程（忽略时空弯曲的解），且

$$q \equiv \frac{GM}{d}$$

这里d 是太阳到光线的垂直距离。

把零级解代入到修正项 $3u^2$ 里，得到一级近似解

$$u \approx q\cos\phi + \frac{3q^2}{2} - \frac{q^2}{2}\cos(2\phi)$$

我们感兴趣的是 $u=0$ 对应的两个 ϕ 的解。设这两个解为 $\pm\frac{\pi+\epsilon}{2}$ （显然光线的偏折角即为 ϵ）。保留到 ϵ 的一级小量，有

$$-q\frac{\epsilon}{2} + 2q^2 = 0$$

即偏折角为 $\epsilon = 4q$。

牛顿力学其实对光线如何偏折没有确定性的结论。因为按牛顿引力公式，光子受力为零，加速度 $a = F/m$ 则是一个不确定量。

如果我们换一种观点，把光子看成质量很小但不是零，且以光速运动的（这在牛顿力学范畴内是允许的），轨迹几乎为直线的测试粒子。牛顿力学的 Binet 公式给出的解为

$$u = q^2(1 + e\cos\phi) \tag{15}$$

这里的 $e \gg 1$。按照前面对非零质量粒子的讨论，这里的 $q = \frac{GM}{d}$，d 是太阳到粒子轨迹的垂直距离（对以光速运动的粒子而言，单位质量的角动量为 $\ell = d$）。Eq. (15) 中令 $\phi = 0$，应该得到 $u = \frac{GM}{d} = q$，即得到 $q = q^2(1+e)$，故$e = \frac{1}{q} - 1 \approx \frac{1}{q}$.

Eq. (15) 中令 $u = 0$，给出偏折角 $\approx \frac{2}{e} \approx 2q$。是广义相对论预言的一半。

对水星进动和光线经过太阳时的弯曲的观测验证，奠定了老爱广义相对论的不可动摇的江湖地位。