General Relativity

§14 Spherical Symmetric Metric

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/gr

思考题

证明爱因斯坦方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

可以等价地写成

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} - 4\pi G T g_{\mu\nu}$$

这里的 $T \equiv T^{\rho}{}_{\rho}$.

本讲的任务是研究 ~~真空中的球形火鸡~~ 球对称的度规

球对称的度规是指

三个空间转动映射的生成元都是Killing vector. . . . . .

球对称的度规是指

~~三个空间转动映射的生成元都是Killing vector......~~

可以取坐标系 (t, r, θ, ϕ)，使得

$$ds^2 = e^{2\Phi(r,t)}dt^2 - e^{-2\Psi(r,t)}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

Ricci张量

用 sympy 代码 `http://zhiqihuang.top/gr/codes/spherical.py` 以及 latex 编译器导出

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= e^{2\Phi+2\Psi}\left[(\Phi_{,r})^2+\Phi_{,r}\Psi_{,r}+\Phi_{,r,r}+\frac{2}{r}\Phi_{,r}\right]-\Phi_{,t}\Psi_{,t}-(\Psi_{,t})^2+\Phi_{,t,t}\\
R_{10} &= -\frac{2}{r}\Psi_{,t}\\
R_{11} &= e^{-2\Phi-2\Psi}\left[\Phi_{,t}\Psi_{,t}+(\Psi_{,t})^2-\Phi_{,t,t}\right]-(\Phi_{,r})^2-\Phi_{,r}\Psi_{,r}-\Phi_{,r,r}-\frac{2}{r}\Psi_{,r}\\
R_{22} &= 1-re^{2\Psi}\Phi_{,r}-re^{2\Psi}\Psi_{,r}-e^{2\Psi}\\
R_{33} &= R_{22}\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

这些方程是我们下面讨论的出发点。

真空中的球形……解

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) d\tau^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

真空中的 Einstein 方程为 $R_{\mu\nu}=0$。由 $R_{10}=0$ 立刻得到:
$\Psi_{,t}=0$, 即 Ψ 只依赖于r。
再根据 $R_{00}=R_{11}=R_{22}=0$ ($R_{33}=R_{22}\sin^2\theta$ 不需要另外考虑)
得到:

$$
\begin{aligned}
r\left[(\Phi_{,r})^2+\Phi_{,r,r}+\Phi_{,r}\Psi_{,r}\right]+2\Phi_{,r} &= 0 \qquad (1)\\
-r\left[(\Phi_{,r})^2+\Phi_{,r}\Psi_{,r}+\Phi_{,r,r}\right]-2\Psi_{,r} &= 0 \qquad (2)\\
e^{-2\Psi}-r\left(\Phi_{,r}+\Psi_{,r}\right)-1 &= 0 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

方程 (1) + 方程 (2)，得到 $(\Phi - \Psi)_{,r} = 0$，积分即得到

$$\Phi - \Psi = 2\lambda(t),$$

这里的 $\lambda(t)$ 为任意函数。我们可以令 $d\tau = e^{\lambda(t)}dt$， 把度规写成

$$ds^2 = e^{2\Psi(r)}d\tau^2 - e^{-2\Psi(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

显然，剩下的任务是搞定 $\Psi(r)$。

方程 (3) 里的 $\Phi_{,r} = \Psi_{,r}$，所以

$$\frac{2\Psi_{,r}}{e^{-2\Psi} - 1} = \frac{1}{r}$$

令 $e^{2\Psi} = 1 - f$，方程变为

$$\frac{f'}{f} = -\frac{1}{r}$$

故

$$f = \frac{2GM}{r}$$

这里的 G 为引力常数， M为待定常数。我们马上会看到用 $2GM$这样的符号来表示积分常数的用意。

史瓦西度规

于是，球对称的真空度规（假设取了合适的时间坐标）一定可以写成

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) d\tau^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

这个度规叫史瓦西 (Schwarzschild) 度规。

能拼出我名字算你赢

Schwarzschild 是个神奇的牛人，有兴趣的童鞋可以去搜索了解下

伯克霍夫定理

在推导过程中我们并没有假设这个度规是静态的（和时间 τ 无关），所以实际上我们还顺手证明了伯克霍夫（Birkhoff） 定理（史瓦西解不需要静态假设）。

大家好，我叫Birkhoff，我对物理的贡献是：证明了在内心zuo基本上是没有用的。

下面我们来说明——为什么 M 是~~火~~鸡引力源的质量

在度规是静态、在空间变化缓慢、且非常接近 Minkowski 度规的情况下，非相对论运动的，静质量非零的粒子的运动方程近似为

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx -\Gamma^i{}_{00} \approx \Gamma_{i00} \approx -\frac{1}{2}g_{00,i}$$

也就是 $\frac{g_{00}-1}{2}$ （减去 1 是对应 Minkowski 情况的引力势消失）起到于引力势的作用。

对照前面的史瓦西度规，就明白为啥 M 对应引力源的质量了吧。

静态球对称的恒星内部

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)(4\pi G p r^3 + G m)}{r(r - 2Gm)}$$

对静态球对称的恒星，度规可以设为

$$ds^2 = e^{2\Phi(r)}dt^2 - e^{-2\Psi(r)}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

来来跑下代码
`http://zhiqihuang.top/gr/codes/sphericalstatic.py` 搞定:

$$\begin{aligned}
G^0_{\ 0} &= \frac{1}{r^2}\left(-2re^{2\Psi}\Psi_{,r} - e^{2\Psi} + 1\right) \\
G^1_{\ 1} &= \frac{1}{r^2}\left(-2re^{2\Psi}\Phi_{,r} - e^{2\Psi} + 1\right) \\
G^2_{\ 2} &= -\frac{1}{r}\left(r\left(\Phi_{,r}\right)^2 + r\Phi_{,r}\Psi_{,r} + r\Phi_{,r,r} + \Phi_{,r} + \Psi_{,r}\right)e^{2\Psi} \\
G^3_{\ 3} &= G^2_{\ 2}
\end{aligned}$$

把恒星近似当作静态球对称的理想流体，其每个宏观流体元的四维速度都是 $u^\mu = (\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}, 0, 0, 0)$。根据

$$T^\mu_\nu = (\rho + p) u^\mu u_\nu - p g^\mu{}_\nu$$

恒星内部的能量动量张量为：

$$T^\mu{}_\nu = \mathrm{diag}\,(\rho, -p, -p, -p)$$

这里的 ρ, p 分别是能量密度和压强，根据球对称性它们只依赖于 r。

具体给定的物质会有个“状态方程”：

$$p = p(\rho) \tag{4}$$

即 p 可由 ρ 确定（例如光子气体的 $p = \rho/3$），所以在假设我们知道恒星的物质组成的情况下， ρ, p 仅仅看成一个未知函数。此外，压强在恒星边界处(设为 $r = a$)消失：

$$p|_{r=a} = 0 \tag{5}$$

在边界处的 Φ 和 Ψ 和外部的史瓦西解衔接

$$e^{\Phi}\Big|_{r=a} = e^{\Psi}\Big|_{r=a} = 1 - \frac{2GM}{r} \tag{6}$$

这里的等效质量 M，也就是恒星外部的牛顿力学观测者得到的恒星质量，具体和 ρ 的关系如何，暂时还不明确。

Einstein方程给出

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2}\left(-2re^{2\Psi}\Psi_{,r} - e^{2\Psi} + 1\right) &= 8\pi G\rho \quad (7)\\
\frac{1}{r^2}\left(-2re^{2\Psi}\Phi_{,r} - e^{2\Psi} + 1\right) &= -8\pi G p \quad (8)\\
-\frac{1}{r}\left(r\left(\Phi_{,r}\right)^2 + r\Phi_{,r}\Psi_{,r} + r\Phi_{,r,r} + \Phi_{,r} + \Psi_{,r}\right)e^{2\Psi} &= -8\pi G p \quad (9)
\end{aligned}$$

由 Bianchi 恒等式， Einstein 方程已经包含了能量动量张量的守恒方程，但是通常这需要一波操作才能看出来。

手滑党表示扛不住操作，不如直接写 $T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0$。

老规矩，跑下代码
`http://zhiqihuang.top/gr/codes/sphericalT.py`
发现只有 $T^{\mu}_{r;\mu} = 0$ 是非平凡的，给出

$$p_{,r} = -(p + \rho)\Phi_{,r} \tag{10}$$

方程 (7) 可以写成

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{r}{2G}\left(1-e^{2\Psi}\right)\right]=4\pi r^2\rho$$

也就是我们可以得到

$$e^{2\Psi}=1-\frac{2G\,m(r)}{r} \tag{11}$$

这里的 $m(r)$ 是“累计等效质量”，对任意 $0\leq q\leq a$，有

$$m(q)=\int_0^q 4\pi\rho r^2 dr \tag{12}$$

注意：它出乎意料地不等于累计能量 $E(q)=\int_0^q 4\pi\rho r^2 e^{-\Psi}dr$.

由此即确定了

$$M=m(a)=\int_0^a 4\pi\rho r^2 dr \tag{13}$$

方程 (8) - 方程 (7)，得到

$$\frac{2}{r}e^{2\Psi}\left(\Phi_{,r}-\Psi_{,r}\right)=8\pi G(\rho+p).$$

即

$$\Phi_{,r}=\Psi_{,r}+4\pi G(\rho+p)re^{-2\Psi}=\frac{4\pi Gpr^3+G\,m(r)}{r\left[r-2G\,m(r)\right]} \tag{14}$$

这个结果代到 Eq. (10)，即得到了大名鼎鼎的奥本海默(Oppenheimer)方程：

$$\boxed{\frac{dp}{dr}=-\frac{(\rho+p)\left[4\pi Gpr^3+G\,m(r)\right]}{r\left[r-2G\,m(r)\right]}}$$

总结求解半径为 a 的恒星内部物质分布和引力场的方法：把状态方程（ρ 和 p 的互相依赖关系）代入奥本海默方程里

$$\boxed{\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)\left[4\pi G p r^3 + G\, m(r)\right]}{r\left[r - 2G\, m(r)\right]}}$$

这里的 $m(q) \equiv \int_0^q 4\pi\rho(r) r^2 dr$。利用上式和边界条件 $p(a) = 0$ 求解出 $p(r), \rho(r)$。

知道 $\rho(r)$ 之后，方程 (11) 立刻就给出了$e^{2\Psi(r)} = 1 - \frac{2G\, m(r)}{r}$。

然后对方程 (14)，也就是

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{4\pi G p r^3 + G\, m(r)}{r\left[r - 2G\, m(r)\right]}$$

进行积分，利用边界上$\Phi(a) = \Psi(a)$ 可以完全确定 $\Phi(r)$。
最后，如果从外面观测，恒星的等效质量 $M = m(a)$.

这一讲我们体验了人机结合的强大之处，连续轻松爆掉史瓦西，伯克霍夫，奥本海默三位巨佬！

是不是有点小激动，准备去研究下中子星的状态方程呢？