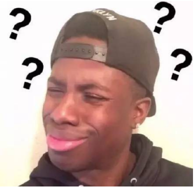
# General Relativity

## §12 Energy Momentum Tensor

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/gr

# 物质 的 能量 动量 张量



这四个词我都知道是什么意思，但合在一起......

# 关于符号的一点点疑惑

学广义相对论最难搞清楚的不是指标，而是正负号

上一讲我们给出了能量动量张量的定义:

$$T_{\mu\nu} = 2\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m$$

或者等价地

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m\right)}{\delta g^{\mu\nu}}$$

我们也可以以逆变的形式定义：

$$\boxed{T^{\mu\nu} = -2\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g_{\mu\nu}} - g^{\mu\nu}\mathcal{L}_m}$$

或者等价地

$$\boxed{T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m\right)}{\delta g_{\mu\nu}}}$$

这里的各种负号让你困惑了吗?

我们先来看一个恒等式：

$$g^{\mu\rho}g_{\rho\lambda} = g^{\mu}{}_{\lambda}$$

两边取变分，右边是个常数，变分为零，所以

$$\delta g^{\mu\rho}g_{\rho\lambda} + g^{\mu\rho}\delta g_{\rho\lambda} = 0$$

两边同乘以 $g^{\nu\lambda}$，并把第二项移到方程右边，得到

$$\boxed{\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}\delta g_{\rho\lambda}}$$

类似地可以得到

$$\boxed{\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}\delta g^{\rho\lambda}}$$

也就是说：
$\delta g_{\mu\nu}$ 和 $\delta g^{\mu\nu}$ 之间可以进行指标升降，但要多个负号。
于是有

$$
\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}_m &= f_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\
&= f^{\alpha\beta} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta g^{\mu\nu} \\
&= -f^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

这里的 $f_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m\right)$。
然后就有

$$
\begin{aligned}
T^{\alpha\beta} &= 2f^{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}\mathcal{L}_m \\
&= -2\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g_{\alpha\beta}} - g^{\alpha\beta}\mathcal{L}_m
\end{aligned}
$$


这种数学推导除了让本喵更迷惑之外毫无用处......

# 一个奇怪的标量

长这么丑竟然也是……

我们把四维坐标 $x^\mu$ 分离为 $t = x^0$ 和 $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ （注意这里的 $\mathbf{x}$ 只具有数学意义，不代表客观物理矢量），试说明 设某静止质量为 $m$ 的粒子的世界线方程为 $\mathbf{x} = \mathbf{y}(t)$，四维动量为 $p^\mu = m\frac{dx^\mu}{ds}$ ($ds = \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$是弧长参数)。试说明

$$\frac{\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{p^0\sqrt{-g}}$$

是标量，这里的 $\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 是（数学意义上的）三维Dirac函数。

# 一个粒子的$T_{\mu\nu}$

$$T^{\mu\nu} = p^\mu p^\nu \frac{\delta^{(3)}\left(\mathbf{x} - \mathbf{y}\right)}{p^0\sqrt{-g}}$$

## 粒子的 $T^{\mu\nu}$

一个质量为 $m$ 的自由粒子，我们不妨称之为Bob，它有作用量

$$S_m = -m \int ds$$

积分沿粒子的世界线进行，$s$ 为弧长参数。

假设 Bob 的世界线用时间坐标 $t = x^0$ 描述为 $y^\mu(t)$，其四维动量为 $p^\mu = m\frac{dx^\mu}{dt}$，

$$S_m = -m \int \sqrt{g_{\mu\nu}\left(y(t)\right) \frac{dy^\mu}{dt} \frac{dy^\nu}{dt}} dt$$

把粒子的四维动量记作 $p^\mu$，上式可以写成

$$S_m = -m \int \sqrt{g_{\mu\nu}\left(y(t)\right) p^\mu p^\nu} \frac{dt}{p^0}$$

# 粒子的 $T^{\mu\nu}$（续）

利用三维 $\delta$ 函数，Bob的作用量可以写成：

$$S_m = -m \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\, p^\mu p^\nu} \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{p^0} d^3\mathbf{x} dt$$

把这个式子河蟹一下：

$$S_m = -m \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\, p^\mu p^\nu} \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{p^0\sqrt{-g}} \sqrt{-g}\, d^4x$$

于是 $\mathcal{L}_m = -m\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\, p^\mu p^\nu}\frac{\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{p^0\sqrt{-g}}$.

要说明一下，这里四维坐标系是给定的，作用量里采用的广义坐标是对应于每一个 $t$ 的 $y^\mu(t)$，以及对应于每一个四维点 $x$ 的 $g_{\mu\nu}(x)$。我们曾经固定$g_{\mu\nu}$，变动 $y^\mu(t)$，推导了粒子的运动方程；现在我们固定 $y^\mu(t)$，变动 $g_{\mu\nu}$，来推导爱因斯坦方程里的 $T^{\mu\nu}$（如果你要推导完整的爱因斯坦方程，当然需要把依赖于 $g_{\mu\nu}$ 的时空作用量加进来一起做变分）。

# 粒子的 $T^{\mu\nu}$（续）

最后，

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m\right)}{\delta g_{\mu\nu}} \\
&= m\frac{p^\mu p^\nu}{\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\,p^\mu p^\nu}}\frac{\delta^{(3)}\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right)}{p^0\sqrt{-g}}
\end{aligned}
$$

由于已经对 $g_{\mu\nu}$ 取完了变分，我们可以取 $g_{\mu\nu}$ 为"该取的值"了，也就是有 $g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = p^\mu p_\mu = m^2$ ，最后我们得到单粒子的能量动量张量：

$$
T^{\mu\nu} = p^\mu p^\nu \frac{\delta^{(3)}\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right)}{p^0\sqrt{-g}}
$$

# 粒子的 $T^{\mu\nu}$（续）

如果某四维点 $x$ 附近，有一堆粒子作统计上各向同性的随机运动，则

$$T^{0i} \propto \sum p^i = 0$$

且

$$T^{ij} \propto \sum p^i p^j \propto \delta^{ij}$$

即能量动量张量是对角矩阵，且 $T^{11} = T^{22} = T^{33}$。

和平直时空的非相对论理想气体比较，我们可以把 $T^{00}$ 叫做能量密度，把 $T^{11} = T^{22} = T^{33}$ 叫做压强。

# 理想流体的 $T^{\mu\nu}$

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}$$

# 理想流体的 $T^{\mu\nu}$

“理想流体”的每一个四维时空点 $x$ 都有一个“宏观速度” $u^{\mu}(x)$，和流体宏观速度共动的观测者看到附近的流体是各向同性的。流体的实质当然是一堆有微观随机运动的粒子，所以流体的共动参照系里流体的能量动量张量为：

$$\tilde{T}^{\mu\nu}\Big|_{\text{comoving}} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

这里的 $\rho$ 是能量密度，$p$ 是压强（均指共动参考系里观测到的）。

# 理想流体的 $T^{\mu\nu}$

转换到原先的参照系，我们先给结论： 理想流体的能量动量张量是

$$\boxed{T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}}$$

如果你采用 $-+++$ 度规符号习惯，上面的右边第二项的减号要变成加号。

如何证明这个 $T^{\mu\nu}$ 在共动参考系里具有 $\mathrm{diag}\,(\rho, p, p, p)$ 的形式呢？下一讲我们将详细讨论观测量的问题。