General Relativity

§10 From Riemann Tensor to Einstein Tensor

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/gr

该在哪里投影?

设 P, Q 是很接近的两点，矢量 $\vec{A}$ 的协变微分给出的是 $\vec{A}(Q)$ 和 $\vec{A}(P)$ 按照 P 处或者 Q 处的投影规则的投影的差。

具体到底是按 P 处还是 Q 处的投影规则? 我们曾评价说这不重要，因为差异是二阶小量。但是，在某些场景下，一阶小量完美抵消，二阶小量也会变得重要——

二阶协变微商

在物理学中，除了热学中的相变等特殊情况之外，我们总是假定足够的光滑性，也就是高阶的普通微商可以任意交换微商次序。协变微商是否也是如此?

先说答案：No！ 高阶协变微商一般不能随意交换微商次序。

问题还是出在投影的不一致性上。在考虑一阶微商时，我们通过取同一个投影规则解决了投影差异带来的（非物理）贡献。但是，这样有个二阶小量的不确定性——而二次微商考察的正是二阶小量。

想不清就硬怼……

由于标量场的第一次微商不涉及投影，标量场的二次微商其实可以交换次序。如果想不大清楚的话，可以来硬怼一下： 设 S 为标量场

$$S_{;\mu;\nu} = S_{;\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\ \mu\nu} S_{;\alpha} = S_{,\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\ \mu\nu} S_{,\alpha}$$

推导竟出乎意料地简单——不过要记得感谢广义相对论用了对称的 Cristoffel 联络——或者说，感谢我们的时空那么单纯简洁。

这次运气就没那么好了

我们来计算一个矢量场 A_μ 的二阶微商：

$$
\begin{aligned}
& A_{\mu;\alpha;\beta} - A_{\mu;\beta;\alpha} \\
= \ & A_{\mu;\alpha,\beta} - \Gamma^\rho{}_{\alpha\beta} A_{\mu;\rho} - \Gamma^\rho{}_{\mu\beta} A_{\rho;\alpha} - [\alpha \leftrightarrow \beta] \\
= \ & A_{\mu;\alpha,\beta} - \Gamma^\rho{}_{\mu\beta} A_{\rho;\alpha} - [\alpha \leftrightarrow \beta] \\
= \ & \left(A_{\mu,\alpha} - \Gamma^\rho{}_{\mu\alpha} A_\rho\right)_{,\beta} - \Gamma^\rho{}_{\mu\beta}\left(A_{\rho,\alpha} - \Gamma^\lambda{}_{\rho\alpha} A_\lambda\right) - [\alpha \leftrightarrow \beta] \\
= \ & -\Gamma^\rho{}_{\mu\alpha,\beta} A_\rho + \Gamma^\rho{}_{\mu\beta} \Gamma^\lambda{}_{\rho\alpha} A_\lambda - [\alpha \leftrightarrow \beta] \\
= \ & \left(-\Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha,\beta} + \Gamma^\rho{}_{\mu\beta} \Gamma^\lambda{}_{\rho\alpha} - [\alpha \leftrightarrow \beta]\right) A_\lambda \\
\equiv \ & -R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} A_\lambda
\end{aligned}
$$

最后一步只是定义。由于A是任意的，这里 $R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta}$ 显然是张量。

黎曼张量(Riemann Tensor)和一些不愉快的符号差异

$$R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\alpha,\beta} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\beta} - [\alpha \leftrightarrow \beta]$$

这是一个让人不愉快的定义，因为如果你手头有很多相关的书，你会发现有些书是按上式定义的，而有些书则相差一个负号。

这种不愉快还会延续到对里奇张量(Ricci Tensor)的定义，我们的定义是收缩第一个和最后一个指标：

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho}$$

而有些书上的定义也相差一个负号(收缩的是第一和第三个指标)。

物理学家找麻烦的决心

如果上述两次不愉快都发生了，那么两次相差的负号就互相抵消，最后本课程的核心方程——爱因斯坦的引力方程的符号就一致了。
但如果你觉得所有人都会遵循让爱因斯坦方程一致的游戏规则，那你就太低估物理学家找麻烦的能力了——爱因斯坦方程同样有两种版本，一种是本课程采用的

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}R\,g^{\mu\nu}=8\pi G T^{\mu\nu}$$

另一种右边相差个负号。

在爱因斯坦方程里，左边的 $R=R^{\alpha}_{\ \alpha}$ 是里奇标量(Ricci scalar)，右边的 $G=6.674\times10^{-11}\mathrm{N\,m^2/kg^2}$ 是牛顿万有引力常数， $T^{\mu\nu}$ 是物质的能量动量张量.

黎曼张量的协变形式

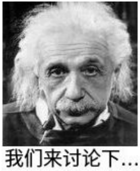
在讨论二维曲面时，我们曾介绍了协变形式的黎曼张量：

$$R_{\lambda\mu\alpha\beta} = \Gamma_{\lambda\mu\alpha,\beta} + \Gamma_{\rho\lambda\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\beta} - [\alpha \leftrightarrow \beta]$$

下面证明它和前面的定义是一致的：

$$\begin{aligned}
R_{\lambda\mu\alpha\beta} &= g_{\lambda\nu}R^{\nu}{}_{\mu\alpha\beta} \\
&= g_{\lambda\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha,\beta} + g_{\lambda\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\rho\beta} - [\alpha \leftrightarrow \beta] \\
&= \Gamma_{\lambda\mu\alpha,\beta} - g_{\lambda\nu,\beta}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha} + g_{\lambda\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\rho\beta} - [\alpha \leftrightarrow \beta] \\
&= \Gamma_{\lambda\mu\alpha,\beta} - \left(\Gamma_{\lambda\nu\beta} + \Gamma_{\nu\lambda\beta}\right)\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\alpha}\Gamma_{\lambda\rho\beta} - [\alpha \leftrightarrow \beta] \\
&= \Gamma_{\lambda\mu\alpha,\beta} - \Gamma_{\nu\lambda\beta}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha} - [\alpha \leftrightarrow \beta] \\
&= \Gamma_{\lambda\mu\alpha,\beta} + \Gamma_{\nu\lambda\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\beta} - [\alpha \leftrightarrow \beta]
\end{aligned}$$

下面我们讨论一个特殊的坐标系：



让一点的联络消失的魔术

如果在一个坐标系 x^μ 下某点 P 的联络为 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(P)$，对在 P 的附近的任意一点 Q，令

$$\tilde{x}^\lambda(Q) = x^\lambda(Q) + \frac{1}{2}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(P)[x^\mu(Q) - x^\mu(P)][x^\nu(Q) - x^\nu(P)].$$

该映射在 P 点满足 $\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu{}_\nu$. 求 Jacobbi 矩阵的逆，还能得到 $\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} = \delta^\mu{}_\nu$. 另外，

$$\frac{\partial^2 \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(P).$$

在P点的联络满足变换式

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(P) = \frac{\partial^2 \tilde{x}^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\beta} + \widetilde{\Gamma}^\rho{}_{\alpha\beta}(P)\frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\rho}\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(P) + \widetilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}(P).$$

也就是在新的 $\tilde{x}^\mu$ 坐标系里，P 点的联络消失了！

在魔术坐标系里的黎曼张量

在魔术坐标系里，由于所有的联络在 P 点消失，P 点的黎曼张量满足:

$$
\begin{aligned}
& 2R_{\lambda\mu\alpha\beta} \\
= \ & 2\Gamma_{\lambda\mu\alpha,\beta} - 2\Gamma_{\lambda\mu\beta,\alpha} \\
= \ & g_{\lambda\mu,\alpha,\beta} + g_{\lambda\alpha,\mu,\beta} - g_{\mu\alpha,\lambda,\beta} - g_{\lambda\mu,\beta,\alpha} - g_{\lambda\beta,\mu,\alpha} + g_{\mu\beta,\lambda,\alpha} \\
= \ & g_{\lambda\alpha,\mu,\beta} - g_{\mu\alpha,\lambda,\beta} - g_{\lambda\beta,\mu,\alpha} + g_{\mu\beta,\lambda,\alpha}
\end{aligned}
$$

于是容易验证:

黎曼张量的对称性

$$R_{\lambda\mu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\lambda\mu};$$

$$R_{\lambda\mu\alpha\beta} = -R_{\lambda\mu\beta\alpha};$$

$$R_{\lambda\mu\alpha\beta} = -R_{\mu\lambda\beta\alpha};$$

$$R_{\lambda\mu\alpha\beta} + R_{\lambda\alpha\beta\mu} + R_{\lambda\beta\mu\alpha} = 0.$$

由于张量方程在坐标变换下不变，所以这些对称性在任何坐标系成立。

在魔术坐标系里到底发生了什么呢？我们仍然以嵌入三维欧氏空间的曲面为例，用 $\mathbf{x}$ 来标记三维欧氏空间的矢量。联络

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \mathbf{x}_{,\lambda} \cdot \mathbf{x}_{,\mu,\nu}$$

全部消失的意思就是所有 $\mathbf{x}_{,\mu,\nu}$ 都和曲面上的所有切向量正交。也就是说，P 点所有 $\mathbf{x}_{,\mu,\nu}$ 或者是零， 或者沿曲面的法向量 $\mathbf{n}$ 的方向。如果曲面上在 P 点的爬虫采用了这个坐标系，它无法发现空间是弯曲的（切向量的变化都在爬虫看不到的维度里）。

这为我们后面讨论的等效原理埋下了伏笔。

在魔术坐标系更容易看出来对称性

在魔术坐标系里 P 点的黎曼张量

$$R_{\lambda\mu\alpha\beta} = \Gamma_{\lambda\mu\alpha,\beta} - \Gamma_{\lambda\mu\beta,\alpha} = \mathbf{x}_{,\lambda,\beta} \cdot \mathbf{x}_{,\mu,\alpha} - \mathbf{x}_{,\lambda,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\mu,\beta}.$$

注意所有 $\mathbf{x}_{,\rho,\sigma}$ 都可以替换成 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{,\rho,\sigma}$，上式把曲面的第二基本形式和黎曼张量联系了起来。从这个表达式也更容易看出黎曼张量的各种对称性。

在魔术坐标系里的P点

$$2R_{\lambda\mu\alpha\beta} = g_{\lambda\alpha,\mu,\beta} - g_{\mu\alpha,\lambda,\beta} - g_{\lambda\beta,\mu,\alpha} + g_{\mu\beta,\lambda,\alpha}$$

P点联络消失，可以尽情地用普通微商替代协变微商

$$2R_{\lambda\mu\alpha\beta;\gamma} = g_{\lambda\alpha,\mu,\beta,\gamma} - g_{\mu\alpha,\lambda,\beta,\gamma} - g_{\lambda\beta,\mu,\alpha,\gamma} + g_{\mu\beta,\lambda,\alpha,\gamma}$$

$$2R_{\lambda\mu\beta\gamma;\alpha} = g_{\lambda\beta,\mu,\gamma,\alpha} - g_{\mu\beta,\lambda,\gamma,\alpha} - g_{\lambda\gamma,\mu,\beta,\alpha} + g_{\mu\gamma,\lambda,\beta,\alpha}$$

$$2R_{\lambda\mu\gamma\alpha;\beta} = g_{\lambda\gamma,\mu,\alpha,\beta} - g_{\mu\gamma,\lambda,\alpha,\beta} - g_{\lambda\alpha,\mu,\gamma,\beta} + g_{\mu\alpha,\lambda,\gamma,\beta}$$

把这三个式子加起来，就得到

Bianchi恒等式

$$R_{\lambda\mu\alpha\beta;\gamma} + R_{\lambda\mu\beta\gamma;\alpha} + R_{\lambda\mu\gamma\alpha;\beta} = 0.$$

由于这是个张量方程，所以在一般坐标系也成立。
把 λ 和 β 缩并，以及 μ 和 α 缩并，得到：

$$R_{;\gamma} - 2R^{\alpha}_{\ \gamma;\alpha} = 0.$$

由于度规的协变微商为零，上式可以写成：

$$\left(R^{\alpha}_{\ \gamma} - \frac{1}{2}g^{\alpha}_{\ \gamma}R\right)_{;\alpha} = 0.$$

爱因斯坦张量

或者写成更广为人知的形式

$$G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0.$$

这里的"爱因斯坦张量"定义为

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R$$

是一个对称张量。
由于物质能量动量张量守恒 $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$，爱因斯坦大胆假设 $G^{\mu\nu}$ 和 $T^{\mu\nu}$ 成正比，得到了著名的爱因斯坦方程。我们下一讲对它进行详细介绍。