General Relativity

§9 Four-Dimensional Spacetime

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/gr

从二维曲面到四维时空

二维曲面的内蕴几何学已经具有足够的代表性。在大多数情况下阿，可以直接把二维曲面的内蕴几何学的结论推广到四维时空。但是，我们之前很多的推导都借助了嵌入高维平直空间的假设，下面我们再以尽量不借助高维平直空间的形式过一遍这些概念，以加深对广义相对论的逻辑架构的理解。

为了和大多数文献保持一致，我们将使用 (x^0, x^1, x^2, x^3) 来标记四维时空的坐标。这里的 x^0 经常具有类似于"时间"的意义——但要注意弯曲时空的时间和空间坐标选取具有更大的随意性，一般不能直接用狭义相对论那套"默认上帝视角"的术语来描述问题。

你或者清晰地说"xx事件在xx坐标系的时间坐标"，或者明确地描述事件"xx通过望远镜观测到xx钟的时间"，模棱两可的描述"对xx观测者来说xx的钟走得更慢"在广义相对论里是不被认可的。

度规

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Minkowski时空

狭义相对论里的 Minkowski 时空是四维时空的一种特殊情况。如果选取惯性运动者的固连直角坐标系，Minkowski 时空的第一基本形式——以后我们简单就说它的度规是：

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2.$$

也就是度规矩阵是个对角矩阵 $\mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$。

在很多文献中，也有把 Minkowski 时空的度规取为 $\mathrm{diag}\,(-1, 1, 1, 1)$ 的。两种取法并无谁对谁错之分，但是在同一个工作里，你最好始终坚持用一种取法，否则计算中很容易产生符号错误。

Minkowski度规

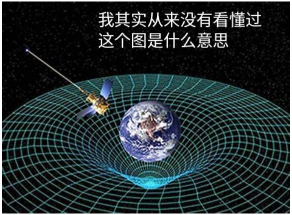
由对角矩阵 $\mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)$ 定义的 Minkowski 度规写作 $\eta_{\mu\nu}$。 这样在 Minkowski 时空 $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$.

从这一讲开始，我们将约定：默认用希腊字母来标记四维时空指标，用拉丁字母来标记三维空间指标。 例如 $p^\mu p_\mu$ 默认表示 $p^0p_0 + p^1p_1 + p^2p_2 + p^3p_3$， 而 p^ip_i 默认表示 $p^1p_1 + p^2p_2 + p^3p_3$。

一般四维时空度规

一般的四维时空是可以有内禀弯曲的，也就是说，无论如何取坐标系，度规 $g_{\mu\nu}$ 都不能处处和 $\eta_{\mu\nu}$ 相同:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$



在宇宙的大多数地方，时空都比较接近 Minkowski 时空，可以把 $g_{\mu\nu}$ 写成

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}.$$

这里的 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. 我们后面会专门对这种形式的度规进行研究，并发展一些非常有用的计算方法。

在另外一些极端的地方，如黑洞、中子星等致密星体的周围。时空和 Minkowski 时空差距巨大。这种问题一般很难求解，我们将仅讨论一些最简单的情况。

联络

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}\right).$$

我们先不假设度规的存在（因而也没有指标的升降等操作）。协变和逆变张量纯粹由数学定义给出，即它们满足张量的坐标变换性质

$$\widetilde{T}_{\mu_1\mu_2\ldots}{}^{\nu_1\nu_2\ldots} = \frac{\partial x^{\lambda_1}}{\partial \tilde{x}^{\mu_1}} \frac{\partial x^{\lambda_2}}{\partial \tilde{x}^{\mu_2}} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^{\nu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \frac{\partial \tilde{x}^{\nu_2}}{\partial x^{\rho_2}} \cdots T_{\lambda_1\lambda_2\ldots}{}^{\rho_1\rho_2\ldots}.$$

即可。

在此前提下，我们根本不讨论物理实体，而是把协变张量和逆变张量看成不同的数学对象。

联络的坐标变换性质

如果要求协变微商保持张量性，就可以推出，当从一个坐标系 (x^0, x^1, x^2, x^3) 变换到另一个坐标系 $(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$，联络的变换规则为：

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^{\mu} \partial \tilde{x}^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \frac{\partial \tilde{x}^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde{x}^{\mu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \tilde{x}^{\nu}}$$

由此可见，联络不是一个张量。

如果有多种可能的联络，显然任何两个联络的差是张量 (因为多余的那项 $\frac{\partial \tilde{x}^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^{\mu} \partial \tilde{x}^{\nu}}$ 抵消了)。反过来，给联络 $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ 加上任何张量 $B^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ 都不会影响联络的坐标变换规则。

协变微商的保张量性

我们再来回忆下协变微商公式

$$
\begin{aligned}
\left(T^{\mu_1\mu_2\ldots}{}_{\nu_1\nu_2\ldots}\right)_{;\lambda} = & \left(T^{\mu_1\mu_2\ldots}{}_{\nu_1\nu_2\ldots}\right)_{,\lambda} \\
& +\Gamma^{\mu_1}{}_{\rho\lambda}T^{\rho\mu_2\ldots}{}_{\nu_1\nu_2\ldots}+\Gamma^{\mu_2}{}_{\rho\lambda}T^{\mu_1\rho\ldots}{}_{\nu_1\nu_2\ldots}+\ldots \\
& -\Gamma^{\rho}{}_{\nu_1\lambda}T^{\mu_1\mu_2\ldots}{}_{\rho\nu_2\ldots}-\Gamma^{\rho}{}_{\nu_2\lambda}T^{\mu_1\mu_2\ldots}{}_{\nu_1\rho\ldots}-\ldots
\end{aligned}
$$

显然，给联络 $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ 加上任何张量 $B^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ 都不会破坏协变微商的保张量性。

现在我们引入度规

协变微商的物理实体性

我们来看 $A^{\mu}{}_{;\nu}$ 和 $A_{\mu;\nu}$ 之间的联系。

在曲面嵌入高维平直空间的假设下，矢量的协变微商具有明确的物理实体对应， $A^{\mu}{}_{;\nu}$ 和 $A_{\mu;\nu}$ 对应同一物理实体，所以必然有 $A_{\mu;\nu} = g_{\mu\lambda}A^{\lambda}{}_{;\nu}$。

如果我们进行的是抽象的不依赖于高维平直空间的讨论。那么除了我们恰好用了很具有迷惑性的符号之外，两者其实并无确定的关系。也就是说，如果把 $A_{\mu;\nu}$ 写成 $T_{\mu\nu}$， $A^{\mu}{}_{;\nu}$ 写成 S^{μ}_{ν}，则 T 和 S 虽然都是张量（这由联络的坐标变换规则和协变微商的计算规则即可保证），但 T 和 S 未必对应同一物理量。

协变微商的物理实体性和度量的普适性之间的关系

显然，协变微商具有物理实体性（升降指标和求协变微商次序可以交换）和 度量的普适性(度规的协变微商处处为零)是同一件事情。

例如，如果度规的协变形式的协变微商为零，就有

$$A_{\mu;\nu} = \left(g_{\mu\lambda}A^{\lambda}\right)_{;\nu} = g_{\mu\lambda;\nu}A^{\lambda} + g_{\mu\lambda}A^{\lambda}{}_{;\nu} = g_{\mu\lambda}A^{\lambda}{}_{;\nu}.$$

度量的普适性的等价条件

由于 g^{μ}_{ν} 是常数矩阵，所以其普通微商为零：

$$g^{\mu}{}_{\nu;\lambda} = \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\lambda} g^{\alpha}{}_{\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda} g^{\mu}{}_{\alpha} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} = 0.$$

即度规的混合形式的协变微商自动为零，并不给出任何额外限制。

度量的普适性的等价条件(续)

度规的协变形式的协变微商为零给出：

$$g_{\mu\nu;\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda} - g_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\ \mu\lambda} - g_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\ \nu\lambda} = 0.$$

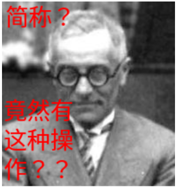
如果上述条件得到满足，我们并不需要额外考虑“度规的逆变形式的协变微商为零”这个条件，这是因为 $g^{\mu\nu} = g^{\mu}_{\ \lambda} g^{\nu}_{\ \rho} g_{\lambda\rho}$，而三个因子的协变微商均为零。

Christoffel-Levi-Civita联络

如果空间是 n 维的，则 $g_{\mu\nu;\lambda}=0$ 给出了 $\frac{n^2(n+1)}{2}$ 个限制方程，还不足以确定 n^3 个联络。不过，如果假设联络是对称的 $\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu}=\Gamma^{\lambda}_{\ \nu\mu}$，就可以通过直接化简 $g_{\mu\lambda;\nu}+g_{\nu\lambda;\mu}-g_{\mu\nu;\lambda}=0$ 得到

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu}\equiv g_{\lambda\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\ \mu\nu}=\frac{1}{2}\left(g_{\lambda\mu,\nu}+g_{\lambda\nu,\mu}-g_{\mu\nu,\lambda}\right);$$

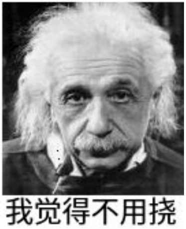
它有个你记不住的名字，叫Christoffel-Levi-Civita联络，简称 Christoffel 联络。



Levi-Civita

挠还是不挠?

在一般的（不假设嵌入高维空间的图景）理论中，可以在联络里加入额外的一个反对称张量，称为挠率张量。这个挠率张量和曲线的挠率同样有“扭曲”的意思，但本质并不相同：前者描述的是由于空间坐标轴的代数不对称性造成的二阶小量修正，后者描述的是普通欧氏空间里的三阶小量修正。



也许是基于我们的时空嵌入在一个高维平直空间里的大胆假设，或者纯粹为了减少理论的自由度，爱因斯坦在广义相对论里假设不存在挠率张量，只使用 Cristoffel 联络。

测地线

由于广义相对论使用 Cristoffel 联络，我们之前对测地线方程的推导完全可以照搬到四维时空来，结果同样是

$$\boxed{\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0.}$$

如果说广义相对论分为运动学和引力两个部分，那么上面的测地线方程就是运动学的核心方程。

在下一讲，我们将转入对爱因斯坦张量的介绍，为讨论广义相对论的第二核心方程——爱因斯坦引力方程做好准备。