General Relativity

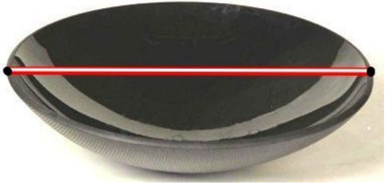
§8 Geodesic

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/gr

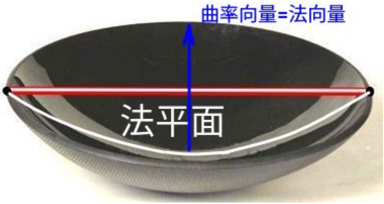
这一讲的主题是：不会拐弯的憨憨在曲面上如何行走?

思考题



如图，假设有一根弹性杆两端固定在碗沿的相对两点上。杆很容易弯曲但很难拉长，怎么尽可能省力地压弹性杆使它贴住碗面？

当碗很深时，结果很不确定（很可能往边上压反而更容易）。但是当碗很浅时，你应该会毫不犹豫地往碗底压杆。

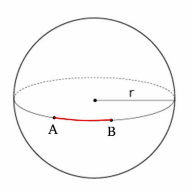


抽象地说，如果在曲面上有足够相近的两点 P, Q (距离 $\ll$ 附近的最小曲率半径), 则 P, Q 间的短程线的曲率向量和曲面的法向量重合。也就是说：可以通过P, Q 两点作曲面的法平面，法平面在曲面上切出来的曲线即是短程线。

测地线(geodesic)

把一段段这样的短程线光滑地拼接起来，就可以得到测地线(geodesic)，它的曲率向量处处和曲面的法向量重合。(请不要跟我杠直线这个特殊情况，让聊天轻松些......)

当然，由一段段局域的短程线拼成的测地线未必是全局的短程线。（但反过来是成立的：全局的短程线必须是测地线。）



例如在球面上，连接A, B两点的红色短弧，和从后面绕过来的灰色长弧都是测地线，显然红色那条才是短程线。

前面的讨论可能和街边大爷聊天差不多。

下面转入稍正经一点论述——

设曲面坐标为 (u^1, u^2)，测地线的弧长参数为 s。测地线的单位切矢量 T 的逆变形式为 $\frac{du^i}{ds}$ (请思考为什么)。
当考察点沿着测地线移动时，由于测地线的密切平面一直保持和曲面垂直，测地线的单位切矢量从三维空间看一直沿着曲面的法向上下摆动。于是生活在曲面上的爬虫完全看不出测地线的单位切矢量 T 在变化。写成数学形式就是 $d\mathrm{T} = 0$. 又根据逆变矢量的协变微分公式:

$$0 = (d\mathrm{T})^i = d\left(\frac{du^i}{ds}\right) + \Gamma^i{}_{jk}\frac{du^j}{ds}du^k = 0.$$

两边同除以 ds，即得到测地线方程:

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + \Gamma^i{}_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds} = 0.$$

自由粒子运动方程即测地线

以后我们讨论四维时空 (x^0, x^1, x^2, x^3) 时，测地线方程

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\ \nu\lambda}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} = 0.$$

描述的是静止量非零的自由粒子的世界线。
像光子这样没有静止质量的粒子的世界线不存在弧长参数，要用 $ds^2 = 0$，也就是 $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$ 来描述。

最后我们来证明测地线的长度取到稳定值，即变分为零

设曲线弧长参数为 s，则曲线的长度积分为

$$\int ds = \int g_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}ds = \int L ds.$$

这里的拉氏量

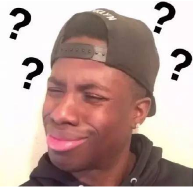
$$L = g_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}.$$

对 u^k 运用 欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{d}{ds}\left(2g_{jk}\frac{du^j}{ds}\right) = g_{ij,k}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}.$$

展开左边的微分，并两边乘以 $\frac{1}{2}g^{ik}$，稍加整理即可得到测地线方程（需用到联络的计算公式）。

这是我们学过的变分法吗?



我不大清楚上面这段证明最早源自何处，总之它让我困惑了很多年……