General Relativity

§7 Covariant Derivative

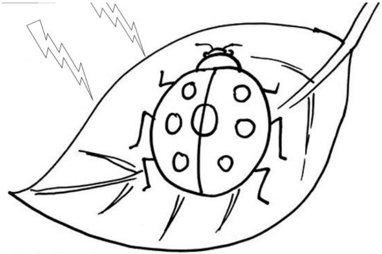
Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/gr

在这一讲里我们继续考虑三维欧氏空间里的曲面 $\mathbf{x}(u^1, u^2)$——虽然很多讨论并不需要在如此特殊的假设下进行，但

这门课的目的是尽可能地让憨憨们理解广义相对论。

曲面上的标量场



我们想象三维欧氏空间中有静电势 $\varphi(\mathbf{x})$。在曲面上的爬虫也能够测量曲面上的静电势 $\varphi(u^1, u^2)$。

标量场的坐标偏导是协变矢量

电势的偏导数 $\varphi_{,i}$ 在坐标变换 $(u^1, u^2) \to (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ 下满足张量的变换规则：

$$\widetilde{\varphi_{,i}} = \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i}\varphi_{,j}.$$

这说明标量场的坐标偏导数是矢量。它的指标在下面，我们称之为协变矢量(covariant vector)。指标在上面的矢量叫逆变矢量(contravariant vector)。

注意：矢量是客观的物理存在，协变形式和逆变形式只是它们在给定坐标系里的不同形式的投影。

啥，你问为什么要用"协变矢量"这样有误导性的名词？"矢量的协变形式"是7个字，"协变矢量"是4个字，我懒得跟你说下去了......

我们来讨论矢量的协变形式和逆变形式到底是怎么投影的——

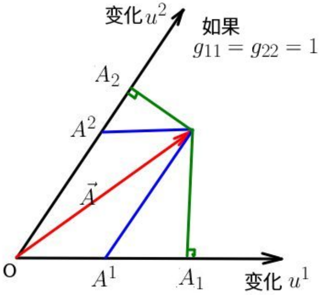
别慌，我没打算给你讲切丛，余切丛，微分形式、抽象指标、旋量表示……

简单粗暴一句话可以解释

逆变分解，协变投影。

好的我知道你木有看懂这句话，我们得上图——

当 u^1, u^2 是弧长元变量



我们在学习曲线论时，发现使用弧长变量可以大大简化几何图像。在曲面论里也是如此：

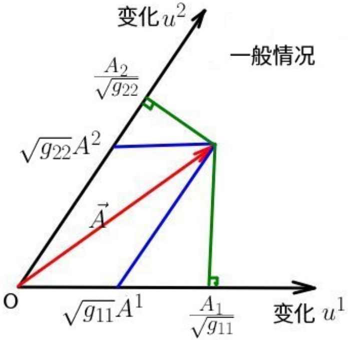
假设 (u^1, u^2) 在 O 点是弧长变量（即 O 点的 $g_{11} = g_{22} = 1$），图中标出了变化坐标 u^1, u^2 产生的两个单位切矢的方向。

红色的箭头是在 O 点的一个矢量 $\vec{A}$（物理客观存在）。

逆变形式 (A^1, A^2) 是 $\vec{A}$ 按两个单位切矢分解的系数——或者说，它们是按平行四边形法则投影的。

协变形式 (A_1, A_2) 是 $\vec{A}$ 在两个单位切矢上的投影——对，就是简单粗暴的作垂线投影！

一般情况要做下长度单位的修正



代数表达式

当你明白了协变和逆变矢量都是依赖于坐标系的特定投影方式之后，前面唠叨的那堆就不那么重要了，具体计算时可以使用三维欧氏空间的图像来辅助：

$$\vec{A} = A^i \mathbf{x}_{,i} = A_i \mathbf{x}^{,i}$$

$$A_i = \vec{A} \cdot \mathbf{x}_{,i}, A^i = \vec{A} \cdot \mathbf{x}^{,i}$$

这些公式可以用我们之前用过的秘密武器轻松证明。证明时注意 $\vec{A}$ 被限定在曲面上，没有法向分量。

我们说曲面上的客观物理对象（张量）都是指限制在曲面内的物理量（例如矢量必须沿曲面的切向）。

因为 $\varphi_{,i}$ 是静电势在曲面上的梯度（客观物理对象）在第 i 个坐标方向上的投影——重点是，它是投影——所以 $\varphi_{,i}$ 是协变矢量。

说因为 $\varphi_{,i}$ 指标在下面所以它是协变矢量的憨憨——你说的都对，但我觉得你应该考虑一下退课……

曲面上位移矢量 $d\mathbf{x}$ 按照两个自然切向量的分解式为

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}_{,i} du^i$$

重点是， 它是分解系数。所以 du^i 是逆变矢量。

说因为 du^i 指标在上面所以它是逆变矢量的憨憨——你说的都对，而且我刚刚想起来你好像来不及退课了……

矢量场的微分

搞清楚协变和逆变的几何图像之后，我们来研究更复杂的对象：曲面上的矢量场 $\vec{A}$ 的微分。这里符号 $\vec{A}$ 是指物理客观存在。比如，对很近的两点 P 和 Q，我们希望计算物理量

$$d\vec{A} = \vec{A}(P) - \vec{A}(Q)$$

注意它既不能用

$$A_i(P) - A_i(Q).$$

也不能用

$$A^i(P) - A^i(Q).$$

来描述！
因为对随意取的曲面坐标系， P 处的投影规则和 Q 处的投影规则可能不一样，这样求差就相当于把投影规则的差别也囊括进来了。

矢量场的微分（续）

为了能用数字描述物理量，我们还是要取一个投影规则。但绝不是两个！

如果都用在 Q 处的投影规则，
$d\vec{A}$ 的协变形式 $=$ $\vec{A}(P)$ 在 Q 的协变投影 - $\vec{A}(Q)$ 的协变形式
如果你都用 P 点的投影规则，
$d\vec{A}$ 的协变形式 $=$ $\vec{A}(P)$ 的协变形式 - $\vec{A}(Q)$ 在 P 的协变投影
这两种定义只有一个二阶小量的差别，并不会产生什么问题。重点是你要坚持只用一个投影规则，不要把投影规则的差异（一阶小量）错误地加到 $d\vec{A}$ 里来。

当然对 $d\vec{A}$ 的逆变形式，类似的讨论也都成立。

矢量场的微分（续）

借助三维欧氏空间的辅助，我们可以算出 $d\vec{A}$ 的协变形式为

$$
\begin{aligned}
(dA)_i &= (d\vec{A}) \cdot \mathbf{x}_{,i} \\
&= d(\vec{A} \cdot \mathbf{x}_{,i}) - \vec{A} \cdot d\mathbf{x}_{,i} \\
&= d(A_i) - \left(A_k \mathbf{x}^{,k}\right) \cdot \left(\mathbf{x}_{,i,j} du^j\right) \\
&= d(A_i) - \Gamma^k{}_{ij} A_k du^j
\end{aligned}
$$

矢量场的协变微商

有了微分 $d\vec{A}$ 的正确表述形式，就可以得到矢量场的正确的求导姿势——称作协变微商(covariant derivative)。

$$A_{i;j} = A_{i,j} - \Gamma^k{}_{ij} A_k.$$

为了区别用逗号(comma)表示的普通偏导数，我们用分号(semicolon)来表示协变微商。

"协变"是指求完导之后多了个下指标，和被求导的张量是用什么形式表述的没有关系；"微商"和朋友圈没关系。

协变微商满足普通微商的所有性质

从前面的讨论看出来，协变微商才是“正确的微商”，它满足一阶微商的所有性质，并且张量的协变微商还是张量。普通微商的物理意义比较复杂，好在它们的数学形式比较简单，我们可以撇开其物理意义，直接用数学知识进行操作。要注意的是，张量的普通微商一般不是张量（不涉及投影的标量除外）。

这是一个你同时精通数学和物理~~才能保住~~也保不住头发的绝佳例子

逆变矢量的微商

逆变矢量的微商直接怼起来稍有些繁琐，但可以用下面的办法巧妙地赖出来：
对逆变 A^i 以及任意协变 B_i，两者可以做张量积再收缩得到一个标量 $A^i B_i$。因为标量不需要投影，所以普通微商和协变微商是一样的。即有

$$(A^i B_i)_{;j} = (A^i B_i)_{,j} = A^i{}_{,j} B_i + A^i B_{i,j}.$$

另一方面

$$(A^i B_i)_{;j} = A^i{}_{;j} B_i + A^i B_{i;j} = A^i{}_{;j} B_i + A^i B_{i,j} - A^i \Gamma^k{}_{ij} B_k$$

比较两个结果，即有

$$A^i{}_{;j} B_i = A^i{}_{,j} B_i + A^i \Gamma^k{}_{ij} B_k$$

逆变矢量的微商(续)

由于求和指标可以随便替换，上述结果中最后一项把 i, k 互换，得到

$$A^i{}_{;j}B_i = A^i{}_{,j}B_i + A^k\Gamma^i{}_{kj}B_i$$

上式要对任意 B_i 成立，所以

$$A^i{}_{;j} = A^i{}_{,j} + \Gamma^i{}_{kj}A^k$$

高阶张量的协变微商

一般来说，大多数高阶张量都不能写成矢量的张量积。但是它们都能拆成一堆“矢量的张量积”之和。例如对一般的二阶张量 T_{ij}，我们不能指望存在 A_i, B_j 使得 $T_{ij} = A_i B_j$，但是我们可以假设

$$T_{ij} = A_i B_j + C_i D_j + \dots$$

这个结论无非是在说“给了足够多自由度方程总有解”，理解起来并不困难。

每一项 $A_i B_j$ 形式的二阶张量的协变微商可以用矢量的协变微商法则推导出来。最后叠加的效果是

$$T_{ij;k} = T_{ij,k} - \Gamma^l_{ik} T_{lj} - \Gamma^l_{jk} T_{il}.$$

高阶张量的协变微商（续）

对一般的带一堆指标的张量形式，协变微商的计算规则如下：

$$
\begin{aligned}
\left(T^{i_1 i_2 \dots}_{ j_1 j_2 \dots}\right)_{;k} = & \left(T^{i_1 i_2 \dots}_{ j_1 j_2 \dots}\right)_{,k} \\
& + \Gamma^{i_1}_{ lk} T^{l i_2 \dots}_{ j_1 j_2 \dots} + \Gamma^{i_2}_{ lk} T^{i_1 l \dots}_{ j_1 j_2 \dots} + \dots \\
& - \Gamma^{l}_{ j_1 k} T^{i_1 i_2 \dots}_{ l j_2 \dots} - \Gamma^{l}_{ j_2 k} T^{i_1 i_2 \dots}_{ j_1 l \dots} - \dots
\end{aligned}
$$

度规只会跟你聊规则

度规是一个很特殊的二阶张量，它描述了协变和逆变的投影规则。

除此之外，它啥也不干。

度规的协变微商是零

一般来说，度规 g_{ij} 在各处并不相同。但这完全是由于各处投影规则的变化产生的。由于协变微商里已经剔除了投影规则变化的影响，所以我们推测——度规的协变微商应该处处是零。

证明如下：因为 $g^i{}_j$ 是单位矩阵，普通微商消失，所以

$$g^i{}_{j;k} = \Gamma^i_{lk} g^l{}_j - \Gamma^l_{jk} g^i{}_l = \Gamma^i{}_{jk} - \Gamma^i{}_{jk} = 0.$$

又协变微商有保张量性，所以 $g^i{}_{j;k}$ 是张量，可以把指标 i 降下来 或者把 指标 j 升上去。所以无论度规以何种形式写出来，它的协变微商总是零。

对度规的协变微商是零的理解

物理上讲，度规描述的是度量规则。

- 对嵌入高维欧氏空间的曲面，度量规则其实各处都一样（都是同一个欧氏空间度量规则），所以度规的协变微商是零。
- 如果你想追随高斯的脑洞，在曲面论中彻底摒弃高维空间，你就必须得承认生活在曲面上的爬虫有一把依靠物理学获得的，不依赖于曲面性质的绝对度量尺子（例如普朗克长度）来定义各处的度量规则。在此前提下，当然各处的度量规则在物理上还是一样的。

对纯粹的数学家而言，实验可检验性毫不重要。建立内蕴几何需要物理学这件事对数学家而言显然非常荒谬。当你问：爬虫到底该选取什么尺子来进行长度测量？数学家会觉得你该吃药了......