General Relativity

§6 Riemann Tensor

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/gr

黎曼张量(Riemann Tensor)

上一讲我们利用升级的秘密武器的最后一击，干净利索地证明了高斯定理。把这个过程稍加推广，就可以得到:

$$
\begin{aligned}
& \beta_{il}\beta_{jk} - \beta_{ik}\beta_{jl} \\
= & \left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}_{,i,l}\right)\left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}_{,j,k}\right) - \left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}_{,i,k}\right)\left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}_{,j,l}\right) \\
= & \mathbf{x}_{,i,l}\cdot\mathbf{x}_{,j,k} - \left(\mathbf{x}_{,m}\cdot\mathbf{x}_{,i,l}\right)\left(\mathbf{x}^{,m}\cdot\mathbf{x}_{,j,k}\right) - \mathbf{x}_{,i,k}\cdot\mathbf{x}_{,j,l} + \left(\mathbf{x}_{,m}\cdot\mathbf{x}_{,i,k}\right)\left(\mathbf{x}^{,m}\cdot\mathbf{x}_{,j,l}\right) \\
= & \mathbf{x}_{,i,l}\cdot\mathbf{x}_{,j,k} - \Gamma_{mil}\Gamma^{m}_{jk} - \mathbf{x}_{,i,k}\cdot\mathbf{x}_{,j,l} + \Gamma_{mik}\Gamma^{m}_{jl} \\
= & \left(\mathbf{x}_{,i}\cdot\mathbf{x}_{,j,k}\right)_{,l} - \left(\mathbf{x}_{,i}\cdot\mathbf{x}_{,j,l}\right)_{,k} + \Gamma_{mik}\Gamma^{m}_{jl} - \Gamma_{mil}\Gamma^{m}_{jk} \\
= & \left(\Gamma_{ijk}\right)_{,l} - \left(\Gamma_{ijl}\right)_{,k} + \Gamma_{mik}\Gamma^{m}_{jl} - \Gamma_{mil}\Gamma^{m}_{jk}
\end{aligned}
$$

我们把这个结果称为黎曼张量 (Riemann Tensor)

$$
R_{ijkl} \equiv \left(\Gamma_{ijk}\right)_{,l} - \left(\Gamma_{ijl}\right)_{,k} + \Gamma_{mik}\Gamma^{m}_{jl} - \Gamma_{mil}\Gamma^{m}_{jk}
$$

黎曼张量的对称性

由 $R_{ijkl} = \beta_{il}\beta_{jk} - \beta_{ik}\beta_{jl}$ 容易得到:

$$R_{ijkl} = R_{klij} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}.$$

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0.$$

由此可以判断 $i = j$ 或者 $k = l$ 时黎曼张量为零。对二维曲面而言，独立的非零的黎曼张量只有 $R_{1221} = \det(\beta)$。我们似乎并没有得到新的等式。但是，我们今后会把度规、联络、黎曼张量推广到高维的空间，上述对称性仍然成立。

思考题

请思考，在 n 维空间，黎曼张量共有多少个独立的分量?

已经多次提到了"张量"的概念，是时候给出一个更加严谨的定义了

当建立坐标系之后，可以把物理量投影到不同的基上，这些投影值叫做物理量的分量。物理量的分量的值依赖于人为选取的坐标系，可以用带一系列带指标的符号来表示。

我们定义一个量 T 为张量，如果它在任意坐标系 $(u^1, u^2, \ldots)$ 和 $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \ldots)$ 里的分量总是满足下列转换关系：

$$\tilde{T}_{i_1 i_2 \ldots}^{\ \ j_1 j_2 \ldots} = \frac{\partial u^{k_1}}{\partial \tilde{u}^{i_1}} \frac{\partial u^{k_2}}{\partial \tilde{u}^{i_2}} \ldots \frac{\partial \tilde{u}^{j_1}}{\partial u^{l_1}} \frac{\partial \tilde{u}^{j_2}}{\partial u^{l_2}} \ldots T_{k_1 k_2 \ldots}^{\ \ l_1 l_2 \ldots}.$$

零阶、一阶和二阶的张量

我们比较熟悉的有带零个指标的“标量”（零阶张量）和带一个指标的“矢量”（1阶张量），像度规 g_{ij} 这样的带两个指标的就叫二阶张量。

我们来说明度规 g_{ij} 为什么是张量。由于要求

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

是不变量，当我们做一个坐标系的变换 $(u^1, u^2, \ldots) \to (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \ldots)$ 时，在新坐标系里的度规 $\tilde{g}_{ij}$ 必须满足：

$$\tilde{g}_{ij} d\tilde{u}^i d\tilde{u}^j = g_{ij} du^i du^j.$$

这是我们熟悉的线性代数的基的变换，很容易看出：

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} g_{kl}.$$

即度规满足张量的定义。

联络不是张量，黎曼张量是张量

请自行用定义证明联络 Γ_{ijk} 不是张量，黎曼张量 R_{ijkl} 是张量。

张量的指标升降

对张量我们可以沿用之前定义的指标升降规则。

把黎曼张量 R_{ijkl} 第一个指标升上来 $R^i{}_{jkl} \equiv g^{im} R_{mjkl}$.

从已有张量构造新张量的第1种办法：张量积

把一个 m 阶张量和一个 n 阶张量 的分量两两相乘，就可以得到 $m+n$ 阶张量。

矢量 A^i 和度规 g_{jk} 的张量积 是三阶张量 $A^i g_{jk}$

从已有张量构造新张量的第2种办法：收缩

把一个 m 阶张量的一组上下指标取成相同，按爱因斯坦求和规则求和之后，可以得到一个 $m-2$ 阶张量。

对黎曼张量 R^i_{jkl} 的第一个指标 i 和最后一个指标 l 进行收缩，得到里奇(Ricci)张量: $R_{jk} \equiv R^i{}_{jki}$；把里奇张量的两个指标收缩，得到里奇标量(Ricci scalar) $R = R^j{}_j$.

思考题

三维欧氏空间里的曲面的里奇标量 R 和高斯曲率 K 的关系是什么？

从已有张量构造新张量的第3种办法：求协变导数

一般来说，对大于零阶的张量求坐标偏导，会使张量变成非张量。在张量分析中，有新的一种导数叫做协变导数。对任意阶张量求协变导数后会得到高一阶的张量。我们会在下一讲中讲解协变导数的几何意义和计算规则。