General Relativity

§5 Connection

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/gr

回忆一下上一讲的结果: 设三维欧氏空间里的曲面 $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ 有第一基本形式

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j,$$

和第二基本形式

$$\mathbf{n} \cdot d^2\mathbf{x} = \beta_{ij} du^i du^j,$$

这里的 $\mathbf{n}$ 是法向量， $g_{ij} = \mathbf{x}_{,i} \cdot \mathbf{x}_{,j}$,
$\beta_{ij} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{,i,j} = -\mathbf{n}_{,i} \cdot \mathbf{x}_{,j} = -\mathbf{x}_{,i} \cdot \mathbf{n}_{,j}$。
本讲的任务是用第一基本形式（度规 g_{ij}）计算高斯曲率
$K = \frac{\det(\beta)}{\det(g)}$。

在此之前，我们又要引入一些新的符号：请准备好呼吸机......

度规和指标的升降

第一基本形式里的度规矩阵

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

由高维欧式空间的距离平方导出，所以一定是正定矩阵。但是在更一般的讨论中，我们将放宽这一假设，只要求它是满秩矩阵。不管怎么说，度规矩阵的逆矩阵存在，我们把它写成

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

度规矩阵和它的逆的乘积当然是单位矩阵，这一事实用爱因斯坦的求和约定写出来就是

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^{\ k} \equiv \begin{cases} 1, & \text{if } i = k \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

指标的升降

我们搞那么多事情，一会儿把指标写上面(例如 du^i)，一会儿把指标写下面（例如 g_{ij}），是因为上下指标含义不同，且可以互相变换。

具体来说，我们将遵循这样的原则对带指标的量进行“指标升降”。

- 如果要把一个上指标 α 降为下指标，我们把上指标里的 α 换成任何一个新的没有用到过的指标，例如 β，然后乘以 $g_{\beta\alpha}$。
- 如果要把一个下指标 α 升为上指标，我们把下指标里的 α 换成任何一个新的没有用到过的指标，例如 β，然后乘以 $g^{\beta\alpha}$。

当然，上面规则中的β 这个指标是什么不重要，因为按爱因斯坦求和规则我们会对 β 进行遍历求和。

例如，我们可以把 du^i 里的上指标 i 降下去，具体就是：

$$du_i \equiv g_{ij} du^j.$$

粗略地看，这无非就是个定义而已。

问题是，这样的定义是自洽的吗？如果我们把 du_i 里的下指标再升上去，还会是和原来一样的 du^i 吗？

答案是肯定的:

$$g^{ij}du_j = g^{ij}g_{jk}du^k = \delta^i{}_k du^k = du^i.$$

很容易把这个简短的证明推广到任意多个指标的任意升降。

思考题

g^{ij} 比较特殊，它是通过 g_{ij}矩阵的逆矩阵定义的。请检验,

- 如果把 g_{ij} 的指标按照上述升降指标的规则升上去，会得到（按逆矩阵定义的） g^{ij} 吗?
- 仅上升一个指标的度规 $g_i{}^j$ 或者 $g^i{}_j$ 是什么?

指标升降操和偏导操作不可交换

对坐标的偏导会产生额外的指标。要格外小心的是，指标的升降操作和偏导产生新指标的操作一般是不可交换的。例如： 我们可以把 g_{ij} 的指标 i 升上去得到 $g^i{}_j$，然后求偏导得到 $g^i{}_{j,k}$。如果我们先求偏导，得到 $g_{ij,k}$ ，然后把指标 i 升上去，会得到一个数值上不一样的结果。

在我们之后学习了张量和协变导数之后，这个问题会得到解决（协变导数和指标升降的操作可以交换）。目前我们对带着偏导的量的指标还是要十分小心，不要随便进行指标升降。

小心地应用指标升降的例子

虽然 $\mathbf{x}_{,i}$ 带着偏导指标，我们还是可以强行定义 $\mathbf{x}^{,i} = g^{ij}\mathbf{x}_{,j}$。由于 $\mathbf{x}^{,i}$ 并没有其他什么定义方式，这种操作还不至于导致混乱。

容易严格按照定义验证

$$\mathbf{x}_{,i} \cdot \mathbf{x}^{,j} = g_i{}^j = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$\mathbf{x}^{,i}\mathbf{x}^{,j} = g^{ij}$$

好了，摘下呼吸机。我们要开始操作了。

秘密武器

我们先来介绍一个秘密武器：三维欧氏空间任意矢量 $\mathbf{v}$ 可以分解成

$$\mathbf{v} = (\mathbf{x}_{,i}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{x}^{,i} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{n}.$$

这个等式是这样证明的，在两边点乘 $\mathbf{x}_{,j}$ 或 $\mathbf{n}$ 都得到相同的结果（这里需要用到 $\mathbf{x}_{,i}\cdot\mathbf{x}^{,j} = g_i{}^j$）。由于 $\mathbf{x}_{,1}$，$\mathbf{x}_{,2}$，$\mathbf{n}$ 是完备的，故得证。

联络(connection)

我们定义一个非常有用的辅助记号： 联络

$$\Gamma_{kij} \equiv \mathbf{x}_{,k} \cdot \mathbf{x}_{,i,j}.$$

显然这样定义的联络具有 $\Gamma_{kij} = \Gamma_{kji}$ 的对称性。

我们还经常需要把联络 Γ_{kij} 的第一个指标升上去，变成

$$\Gamma^k_{\ ij} \equiv g^{kl}\Gamma_{lij} = \mathbf{x}^{,k} \cdot \mathbf{x}_{,i,j}$$

联络可以用度规导出

度规的偏导数可以用联络写出来:

$$g_{ij,k} = (\mathbf{x}_{,i} \cdot \mathbf{x}_{,j})_{,k} = \mathbf{x}_{,i,k} \cdot \mathbf{x}_{,j} + \mathbf{x}_{,i} \cdot \mathbf{x}_{,j,k} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{ijk}.$$

同理

$$g_{ki,j} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{kij}$$

$$g_{kj,i} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{kij}$$

把后两式相加并减去第一式，即可得到:

$$\boxed{\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}\left(g_{ki,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}\right).}$$

也就是说，联络可以由第一基本形式得到。

升级武器

我们再把秘密武器进行一下升级：任意两个三维欧式空间的矢量 $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$。可以把它们各自按秘密武器展开后，再求两者的内积

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}\cdot\mathbf{z} &= \left[(\mathbf{x}_{,i}\cdot\mathbf{y})\,\mathbf{x}^{,i} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{y})\mathbf{n}\right]\cdot\left[(\mathbf{x}_{,j}\cdot\mathbf{z})\,\mathbf{x}^{,j} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{z})\mathbf{n}\right] \\
&= (\mathbf{x}_{,i}\cdot\mathbf{y})\,(\mathbf{x}_{,j}\cdot\mathbf{z})\,\mathbf{x}^{,i}\cdot\mathbf{x}^{,j} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{y})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{z}) \\
&= (\mathbf{x}_{,i}\cdot\mathbf{y})\,(\mathbf{x}_{,j}\cdot\mathbf{z})\,g^{ij} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{y})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{z}) \\
&= (\mathbf{x}_{,i}\cdot\mathbf{y})\left(\mathbf{x}^{,i}\cdot\mathbf{z}\right) + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{y})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{z})
\end{aligned}$$

我们得到了一个计算 $(\mathbf{n}\cdot y)(\mathbf{n}\cdot z)$ 的有效方法：

$$(\mathbf{n}\cdot\mathbf{y})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{z}) = \mathbf{y}\cdot\mathbf{z} - (\mathbf{x}_{,i}\cdot\mathbf{y})\left(\mathbf{x}^{,i}\cdot\mathbf{z}\right).$$

计算高斯曲率 $K = \frac{\det(\beta)}{\det(g)}$

利用升级的秘密武器，立刻有

$$
\begin{aligned}
& \det(\beta) \\
= \quad & \beta_{11}\beta_{22} - (\beta_{12})^2 \\
= \quad & (\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}_{,1,1})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}_{,2,2}) - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}_{,1,2})^2 \\
= \quad & \mathbf{x}_{,1,1}\cdot\mathbf{x}_{,2,2} - (\mathbf{x}_{,i}\cdot\mathbf{x}_{,1,1})(\mathbf{x}^{,i}\cdot\mathbf{x}_{,2,2}) - (\mathbf{x}_{,1,2})^2 + (\mathbf{x}_{,i}\cdot\mathbf{x}_{,1,2})(\mathbf{x}^{,i}\cdot\mathbf{x}_{,1,2}) \\
= \quad & \mathbf{x}_{,1,1}\cdot\mathbf{x}_{,2,2} - \Gamma_{i11}\Gamma^{i}{}_{22} - (\mathbf{x}_{,1,2})^2 + \Gamma_{i12}\Gamma^{i}{}_{12} \\
= \quad & (\mathbf{x}_{,1,1}\cdot\mathbf{x}_{,2})_{,2} - (\mathbf{x}_{,1,2}\cdot\mathbf{x}_{,2})_{,1} + \Gamma_{i12}\Gamma^{i}{}_{12} - \Gamma_{i11}\Gamma^{i}{}_{22} \\
= \quad & (\Gamma_{211})_{,2} - (\Gamma_{212})_{,1} + \Gamma_{i12}\Gamma^{i}{}_{12} - \Gamma_{i11}\Gamma^{i}{}_{22}
\end{aligned}
$$

联络可以用度规和度规的偏导数写出来，所以任务完成。

sympy又来了

从度规到联络和从联络到高斯曲率的计算都比较繁琐。我们可以写一个 sympy 脚本代劳，请参考：

`http://zhiqihuang.top/gr/codes/connection.py`