General Relativity

§4 Gaussian Curvature

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/gr

课前小练习

两个二次型之比

按照惯例，先回忆下美好的线性代数……

设矩阵 A, B 都是 $n \times n$ 的实对称矩阵，且 A 是正定的。
对$n \times 1$ 的非零列向量 $\mathbf{x}$，定义

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T B \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}.$$

$f(\mathbf{x})$ 的取值范围是怎样的？取到最小值和最大值的条件分别是什么？

令 $\mathbf{y} = A^{1/2}\mathbf{x}$, $C = A^{-1/2}BA^{-1/2}$，则

$$f(x) = \frac{\mathbf{y}^T C\mathbf{y}}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}$$

在 C 的本征矢为基的空间看，这个表达式只是 C 的各个本征值的加权平均，权重均非负。所以取值范围为 $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$。这里的 $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ 分别是 C 的最小和最大的本征值。取到最小值和最大值的条件分别是 $\mathbf{y}$ 为 $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ 对应的本征矢。

一个实对称矩阵 A 的解析函数 $f(A)$ 可以这样计算：把矩阵正交对角化 $A = R\Lambda R^T$，这里的 $R^T R = I$, $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$。然后对任意非负整数 n，有

$$A^n = R\Lambda R^T R\Lambda R^T \ldots R\Lambda R^T = R\Lambda^n R^T = R\,\mathrm{diag}\,(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots)R^T.$$

于是对任何可以局域地展成幂级数的函数 f，可以认为

$$f(A) = R\,\mathrm{diag}\,(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots)R^T.$$

显然 $f(A)$ 仍然是对称矩阵。

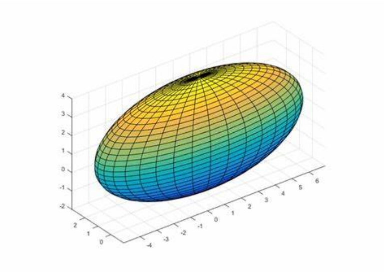
描述曲面的弯曲程度

药丸

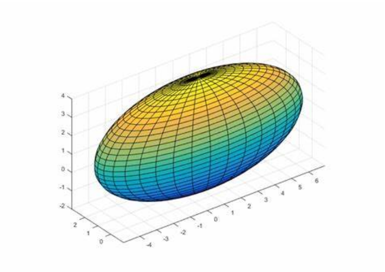
我们曾经用一段近似圆弧来描述曲线的弯曲程度。曲线的曲率就是圆弧半径的倒数。

那么曲面的弯曲程度是不是可以用一个近似球面来描述？（并把球面半径倒数称为曲率？）

答案是 NO。
请凝视下面的药丸（特别是它的侧边）三秒钟，不解释。



结论：三维空间里的曲面的局域近似不能用球面，要用药丸。



观察这个药丸的侧边，设曲面上的沿着两个正交的方向的曲线（近似圆弧）的曲率分别为 $\kappa_{\min}, \kappa_{\max}$。沿着其他方向的曲线的曲率似乎介于两者之间。下面我们就来就如何计算 $\kappa_{\min}, \kappa_{\max}$ 以及任意方向的曲线的曲率进行一波推导。
为此，我们先引入一波奇怪的符号……

一大波奇怪的符号来袭……

感到呼吸困难

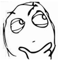
奇怪的右上指标

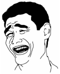
毕竟我们最后是要讨论四维的弯曲时空。为了能和更高维度的弯曲空间接轨，我们有必要从现在开始就使用一些不很依赖于维度的符号。

例如，我们要把描述曲面的 u, v， 换成 u^1, u^2。

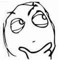
u^1, u^2 不是 u 的一次方，二次方的意思。它们仅仅表示曲面上的第一个和第二个变量（爬虫用的世界坐标）。

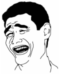
关于变量指标在右上这件事情的Q&A

我看到 u^1, u^2 这样的符号感到很不适，需要服用双黄连吗?

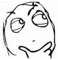
建议上呼吸机。

关于变量指标在右上这件事情的Q&A

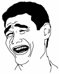
第二个变量的平方怎么写?

$u^2 u^2$ (这个是否让你感觉更糟糕) 或者 $\left(u^2\right)^2$。但大多数情况下我们不需要写这个东西。

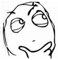
关于变量指标在右上这件事情的Q&A



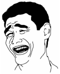
怎么区分 u 的平方和 u^2?



u 的平方是啥意思?



$u=(u^1,u^2)$的话，u 的平方就是: $(u^1)^2+(u^2)^2$



看，你已经写出来了！

（不过，这个表达式仍然不怎么常用，因为这样的 u 平方的定义只对欧式空间的直角坐标成立。我们以后会给出任意空间内 u 的平方的含义，并给出新的写法。）

曲面的第一基本形式

$$d\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} du^1 & du^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} g_{ij} du^i du^j .$$

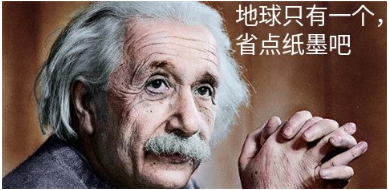
这里度规矩阵 g_{ij} $(i, j = 1, 2)$定义为

$$g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j} .$$

注意，我们把 g_{ij} 里的 i, j 都写成了下标。这是因为等号右边的上标 i, j 都在分母——当把上标放到分母，它会变成下标；反之亦然。

爱因斯坦求和规则

当爱因斯坦研究广义相对论时，写着一堆求和号的表达式满天乱飞。为了节省笔墨保护森林，他提出一个约定：如果一个指标在上标和下标中各出现一次，那么就默认对它进行求和。



这样第一基本形式可以写成：

$$d\mathbf{x}^2 = g_{ij} du^i du^j.$$

这里的 i, j 都按约定默认进行求和。

曲面的第二基本形式

$$\mathbf{n} \cdot d^2\mathbf{x} = -d\mathbf{n} \cdot d\mathbf{x} = \beta_{ij} du^i du^j.$$

等式右边同样按爱因斯坦求和规则对 i, j 进行求和。
这里的

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}}{\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} \right|}.$$

$$\beta_{ij} = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j} = -\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j} = -\frac{\partial \mathbf{x}}{du^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^j}$$

偏导用逗号

在不至引起混淆的情况下，我们还约定，对 u^i 的偏导数用下标 $_{,i}$ 来表示。

这样

$$g_{ij} = \mathbf{x}_{,i} \cdot \mathbf{x}_{,j}$$

$$\beta_{ij} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{,i,j} = -\mathbf{n}_{,i} \cdot \mathbf{x}_{,j} = -\mathbf{x}_{,i} \cdot \mathbf{n}_{,j}$$

好了，符号介绍完了。

戴上你的呼吸机，我们要开始起飞了——

曲面上的曲线

曲面上的曲线可以写成 $\mathbf{x}\left(u^1(s), u^2(s)\right)$，这里 s 为弧长参数。

曲线的单位切向量

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{x}_{,i}\frac{du^i}{ds}.$$

曲线的曲率向量

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = \mathbf{x}_{,i,j}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} + \mathbf{x}_{,i}\frac{d^2u^i}{ds^2}.$$

当然，这样算出来的曲率并不代表曲面的弯曲程度，因为即使是完全没有弯曲的平面，你也可以在上面取一条曲率非零的曲线——只是，它的曲率向量会落在平面内。

结论就是：曲率向量落在曲面的切向的部分都不能表征曲面的弯曲程度；曲率向量落在曲面的法向的部分才表征曲面弯曲程度。

法向曲率

把曲率向量投影到曲面的法向 $\mathbf{n}$ 上，得到

$$\mathbf{n}\cdot\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}=\beta_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}.$$

（注意第二项消失是因为 $\mathbf{n}\cdot d\mathbf{x}=0$）
注意到切向的 ds^2 其实就是第一基本形式 $g_{ij}du^i du^j$，上面的结果可以写成：

$$\mathbf{n}\cdot\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}=\frac{\beta_{ij}du^i du^j}{g_{ij}du^i du^j}.$$

也就是说，沿 (du^1,du^2) 方向的曲线的法向曲率等于第二基本形式和第一基本形式之比。

法向曲率是两个本征曲率的加权平均

$$\mathbf{n}\cdot\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}=\frac{\beta_{ij}du^i du^j}{g_{ij}du^i du^j}.$$

这个表达式，两个二次型之比，眼熟不?
对，它就是矩阵 $C=g^{-1/2}\beta g^{-1/2}$ 的两个本征值 $\kappa_{\max},\kappa_{\min}$ 的加权平均。
设

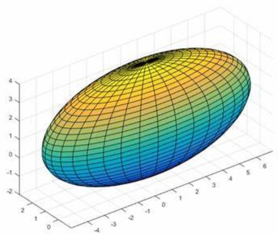
$$g^{1/2}\begin{pmatrix}du^1\\du^2\end{pmatrix}$$

和C 对应于 $\kappa_{\max},\kappa_{\min}$ 的两个本征矢之间的夹角为 θ，则沿 (du^1,du^2) 方向的曲线的法向曲率等于

$$\kappa_{\max}\cos^2\theta+\kappa_{\min}\sin^2\theta.$$

这个公式最早是欧拉发现的。

我们把 $C = g^{-1/2}\beta g^{-1/2}$ 的两个本征值 $\kappa_{\max}, \kappa_{\min}$ 称为曲面的两个主曲率。



药丸的边缘上的两个主曲率的就是正交的两条弧线的半径的倒数。

主曲率的计算

$C = g^{-1/2}\beta g^{-1/2}$ 的本征值方程是

$$\det\left(g^{-1/2}\beta g^{-1/2} - \lambda I\right) = 0$$

左乘 $g^{1/2}$ 右乘 $g^{1/2}$，显然不影响矩阵的零秩性，于是上式等价于

$$\det(\beta - \lambda g) = 0$$

具体写出来就是

$$\det(g)\lambda^2 + (2g_{12}\beta_{12} - g_{11}\beta_{22} - g_{22}\beta_{11})\lambda + \det(\beta) = 0.$$

于是根据韦达定理，有

$$\kappa_{\min} + \kappa_{\max} = \frac{g_{11}\beta_{22} + g_{22}\beta_{11} - 2g_{12}\beta_{12}}{\det(g)}.$$

$$\kappa_{\min}\kappa_{\max} = \frac{\det(\beta)}{\det(g)}.$$

高斯曲率

两个主曲率的乘积

$$K = \kappa_{\text{min}}\kappa_{\text{max}} = \frac{\det(\beta)}{\det(g)}.$$

叫做曲面的高斯曲率。它比两个主曲率之和 $\kappa_{\text{min}} + \kappa_{\text{max}}$ 要重要得多。这是为什么呢?

高斯曲率的重要性

还记得《广义相对论》是要干啥吗？通过第一基本形式来研究空间的弯曲性质。

在一维的曲线上，如果只允许在曲线上测距，则只能确定弧长变量 s 而无法获得曲率或挠率的信息。曲线上的爬虫不可能通过第一基本形式来研究空间的弯曲性质。也就是说，一维曲线没有内禀弯曲，它总是可以无伸缩地拉成一条直线。

二维曲面的情况则有所不同，只有像圆柱、圆锥这样的曲面才能无伸缩地拉成一个平面。圆柱、圆锥的特点是：总是有一个“直”的方向，也就是两个主曲率之一是零，或者说高斯曲率 $\kappa_{\min}\kappa_{\max} = 0$。这暗示着我们高斯曲率可能和曲面的内禀弯曲有关。而 $\kappa_{\min} + \kappa_{\max}$ 在圆柱和圆锥上均不为零，则可能对应高维空间才能看到的非内禀弯曲。

如果回到高斯曲率的计算公式 $K = \frac{\det(\beta)}{\det(g)}$，似乎还是需要曲面的第二基本形式（高维信息）才能计算。但是，这个结论仅对一个孤立的点成立。如果我们把不同点的第一基本形式联系起来，就会发现一个神奇的现象：高斯曲率可以完全只通过第一基本形式获得，而 $\kappa_{\min} + \kappa_{\max}$ 则不行

高斯的脑洞

高斯曲率是曲面的内禀性质，只要在曲面上测距（不需要高维的信息）就能获得。这个美妙的结论是高斯发现的。

高斯的 sympy.oo 才华决定了他不会把这个结论当成一个平凡的数学结果。他指出：曲面的弯曲程度等几何性质可以限定在曲面上进行讨论。（尔等菜鸡）想象曲面放在一个三维或更高维的空间里是完全没有必要的步骤。

下一讲我们将讨论： 如何只用曲面第一基本形式推出高斯曲率