General Relativity

§2 Embedded Curves

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/gr

欧式空间中的正则曲线

设n维欧氏空间有条曲线 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$。

它的切向量可以定义为 $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right)$，这也是一个向量函数。

本讲中我们将一直假设曲线的各个分量函数至少三次可导，且切向量处处非零：$\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right| \neq 0$。这样的曲线称之为“正则曲线”。

曲线的弧长参数和单位切向量T

如果参数从某个允许的确定值 a (例如，如果允许的话，可取 $a = 0$) 变化到 t， 对应的一段弧长为

$$s = \int_a^t \left| \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right| d\tau.$$

我们可以选取 s 而不是 t 作为参量来描述曲线。

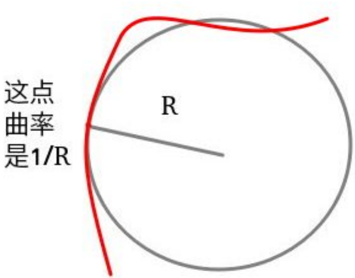
注1：正则性保证了 t 到 s 的映射是单调映射。

注2：一般我们假定曲线的参数形式默认给了曲线一个方向，即 t 的正向给出了曲线的方向。选定方向的曲线的弧长参数 s 几乎就是确定的了，至多相差一个常数。我们后面讨论的 Frenet 标架等，都依赖于曲线方向已经给定这个假定。否则曲线的弧长参数和 Frenet 标架会有个符号不确定性。

选择了弧长参数之后，显然地， $\mathbf{T} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{ds}$ 是单位切向量。

曲率(curvature)

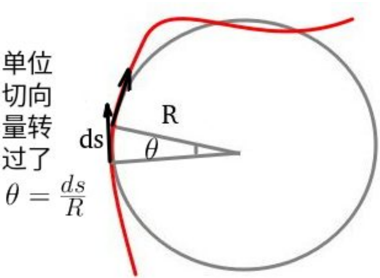
曲线的一小段总是能用圆弧来近似。圆弧半径越大，曲线的一小段就看起来越直。反之，圆弧半径越小，曲线的一小段就看起来很弯曲。所以曲线在一点上的"曲率" κ 就定义为这点附近的近似圆弧的半径的倒数。



曲线的曲率公式

假设有曲线 $\mathbf{x}(s)$， s 是弧长参数。在曲线上的给定点附近， 单位切向量 $\frac{d\mathbf{x}}{ds}$ 的变化的大小应该等于它的方向变化的大小（用近似圆弧来计算就是 $\frac{ds}{R}$）。

$$\left| d\frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| = \frac{ds}{R}$$



曲线的曲率公式

由此得到曲率 $\frac{1}{R}$ 的值

$$\kappa = \left|\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\right|.$$

这个公式如此简洁美妙，完全得益于我们选取了弧长作为曲线的参数。

如果我们把取绝对值的操作去掉，则得到的是一个“曲率向量”：

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}.$$

它的大小为曲率，方向从所讨论的点指向近似圆弧的圆心。

密切平面, 主法向量，次法向量

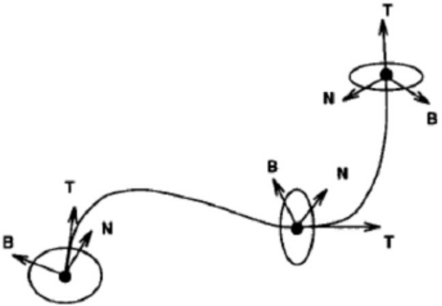
假设曲线上某点的曲率向量 $\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}$ 非零 (显然它和该点单位切向量 $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}$ 垂直)，我们称归一化的曲率向量，也就是:

$$\mathbf{N} \equiv \frac{1}{\kappa}\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}$$

为曲线在该点的主法向量(normal vector)。
单位切向量 $\mathbf{T}$ 和主法向量 $\mathbf{N}$ 一起确定了近似圆弧所在的“密切平面”；和密切平面垂直的 $n-2$ 个单位法向量则称为次法向量(binormal vectors)。

三维空间曲线的Frenet标架

从现在开始我们专门讨论嵌入在三维空间的曲线。这时单位切向量**T**，主法向量**N**，次法向量**B**一起构成了一个局域的直角坐标架——它有个很炫酷的名字，叫“Frenet 标架”。



嵌在三维空间的曲线的Frenet标架总结

切向量(tangent vector)

$$\mathbf{T}(s) = \frac{d\mathbf{x}}{ds};$$

主法向量(normal vector)

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{\kappa}\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}; \ \ \kappa \equiv |\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}|;$$

次法向量(binormal vector)

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s).$$

注：垂直于$\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$, $\mathbf{B}(s)$ 的平面分别称为法平面，切平面，和密切平面。

嵌在三维空间的曲线的挠率(torsion)

一般来说当沿着曲线运动时，密切平面会发生“摆动”，即次法向量 $\mathbf{B}$ 会发生变化。我们先来证明，$\frac{d\mathbf{B}}{ds}$ 一定和 $\mathbf{N}$ 同向。
把归一化条件 $\mathbf{B}^2 = 1$ 对 s 求导，可得到 $\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{B} = 0$，即 $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$ 和 $\mathbf{B}$ 是垂直的。此外，

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d(\mathbf{T}\times\mathbf{N})}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\times\mathbf{N} + \mathbf{T}\times\frac{d\mathbf{N}}{ds}$$

注意到 $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$，上式右边的第一项为零，即 $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$ 和 $\mathbf{T}$ 也垂直。
于是不妨设

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}.$$

我们把 τ 称为挠率。注意和曲率不同，挠率是可正可负的。它的大小 $|\tau| = |\frac{d\mathbf{B}}{ds}|$ 刻画了密切平面的摆动快慢。

思考题

如果一条曲线的挠率处处为零，这说明了曲线的什么几何特性?

嵌在三维空间的曲线的Frenet方程

我们来研究Frenet标架的变化率。首先，根据定义已经知道了：

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}$$

和

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau \mathbf{N}.$$

剩下的非常简单：

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{ds} \times \mathbf{T} + \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{T}}{ds} = -\tau \mathbf{N} \times \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B} \times \mathbf{N} = \tau \mathbf{B} - \kappa \mathbf{T}.$$

把Frenet方程写成矩阵形式

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$$

思考题（本题给出了挠率的一种常见计算方法）

设 $\mathbf{x}(s)$ 是三维空间的一条曲线，s是弧长参数。试证明：以三个矢量 $\frac{d\mathbf{x}}{ds}$，$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}$，$\frac{d^3\mathbf{x}}{ds^3}$ 为列矢量的行列式的值等于 $\tau\kappa^2$。

如果曲线不是用弧长参数表示的怎么办

一般参数表示的曲线 $\mathbf{x}(t)$ 的Frenet标架、曲率、挠率的计算都比较复杂。但都可以用

$$\frac{ds}{dt} = |\frac{d\mathbf{x}}{dt}|$$

进行转化。下面我们直接给出计算结果:

一般参数曲线$\mathbf{x}(t)$的Frenet计算公式

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{x}'(t)}{|\mathbf{x}'(t)|} \\
\mathbf{N}(t) &= \frac{|\mathbf{x}'(t)|^2\mathbf{x}''(t) - (\mathbf{x}'(t)\cdot\mathbf{x}''(t))\,\mathbf{x}'(t)}{|\mathbf{x}'(t)|\,|\mathbf{x}'(t)\times\mathbf{x}''(t)|} \\
\mathbf{B}(t) &= \frac{\mathbf{x}'(t)\times\mathbf{x}''(t)}{|\mathbf{x}'(t)\times\mathbf{x}''(t)|} \\
\kappa(t) &= \frac{|\mathbf{x}'(t)\times\mathbf{x}''(t)|}{|\mathbf{x}'(t)|^3} \\
\tau(t) &= \frac{\mathbf{x}'(t)\cdot(\mathbf{x}''(t)\times\mathbf{x}'''(t))}{|\mathbf{x}'(t)\times\mathbf{x}''(t)|^2}
\end{aligned}
$$

请参考 `http://zhiqihuang.top/gr/codes/frenet.py`

曲线的邻域展开

由于 **T**, **N**, **B** 包含了曲线的一次导数，二次导数，三次导数的信息，我们可以在一点附近展开曲线到三阶近似：

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(s+ds) &\approx \mathbf{x}(s) \\
&+ \left(ds - \frac{\kappa^2}{6}ds^3\right)\mathbf{T}(s) \\
&+ \left(\frac{\kappa}{2}ds^2 + \frac{1}{6}\frac{d\kappa}{ds}ds^3\right)\mathbf{N}(s) \\
&+ \frac{\kappa\tau}{6}ds^3\mathbf{B}(s).
\end{aligned}$$

例题：球面上的曲线

设 $\mathbf{x}(s)$ 是三维空间的球面上的一条曲率和挠率均非零的曲线，s 是弧长参数。证明：

$$\frac{1}{\kappa^2}+\left[\frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right]^2$$

是常数。

解法1

证明：不妨设球半径为单位长度，并取球心为原点。球面上的曲线满足方程：

$$\mathbf{x}^2 = 1. \tag{1}$$

两边对 s 求导得到

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{T} = 0. \tag{2}$$

于是可以假设

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{N} + \beta \mathbf{B} \tag{3}$$

其中 α, β 是待定的（依赖于s的）参量，满足 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$。两边继续对 s 求导并利用Frenet公式，

$$\mathbf{T} = -\alpha\kappa\mathbf{T} + \left(\frac{d\alpha}{ds} - \tau\beta\right)\mathbf{N} + \left(\frac{d\beta}{ds} + \alpha\tau\right)\mathbf{B}. \tag{4}$$

解法1

于是有

$$\alpha = -\frac{1}{\kappa}; \tag{5}$$

$$\beta = -\frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa}\right). \tag{6}$$

于是利用 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ 即得证。

解法2

证明：不妨设球半径为单位长度，并取球心为原点。球面上的曲线满足方程：

$$\mathbf{x}^2 = 1. \tag{7}$$

把 $\mathbf{x}(s+ds)^2 = 1$ 近似展开到 ds^3量级，有

$$\begin{aligned}
1 \quad = \quad & 1 + (2ds - \frac{\kappa}{3}ds^3)\mathbf{x}(s)\cdot\mathbf{T}(s) \\
& + \left(\kappa ds^2 + \frac{1}{3}\frac{d\kappa}{ds}ds^3\right)\mathbf{x}(s)\cdot\mathbf{N}(s) \\
& + \frac{\kappa\tau}{3}ds^3\,\mathbf{x}(s)\cdot\mathbf{B}(s) \\
& + ds^2.
\end{aligned}$$

解法2

由 ds一次项系数为零，得到

$$\mathbf{x}(s)\cdot\mathbf{T}(s)=0.$$

由 ds^2系数为零，得到

$$\mathbf{x}(s)\cdot\mathbf{N}(s)=-\frac{1}{\kappa}.$$

再由 ds^3 系数为零，得到

$$\mathbf{x}(s)\cdot\mathbf{B}(s)=\frac{1}{\kappa^2\tau}\frac{d\kappa}{ds}=-\frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa}\right).$$

于是得证。

曲线论基本定理

根据我们对曲率和挠率的几何图像理解，下列定理是显然的：

三维欧氏空间内两条以弧长 s 为参数的正则曲线。如果它们的曲率处处不为零，且对同一个 s，两条曲线的曲率，挠率都分别相等。则两条曲线可以通过一个刚体运动重叠起来。

例题

证明曲线 $\mathbf{x}(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ 和曲线 $\mathbf{y}(u) = \left(\frac{e^{-u}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{u}}{\sqrt{2}}, u+1\right)$ 在三维欧式空间内的一个刚体运动下是重合的。

解答

证明: 直接计算得到 $\mathbf{x}(t)$ 弧长参数，曲率和挠率为:

$$s_x(t) = \sqrt{2}\sinh t, \kappa_x(t) = \tau_x(t) = \frac{1}{2\cosh^2(t)}$$

$\mathbf{y}(u)$ 的弧长参数，曲率和挠率为

$$s_y(u) = \sqrt{2}\sinh u, \kappa_y(u) = \tau_y(u) = \frac{1}{2\cosh^2(u)}.$$

故同样的 t 和 u 对应相同的弧长参数，曲率，挠率。证毕。

二维欧式空间中的曲线

嵌入在二维欧式空间里的曲线可以看成嵌在三维欧式空间中的无挠（挠率为零的）曲线。平面曲线有一些独特的性质，我们来专门讨论一下。

设曲线 $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))$ 以弧长 s 为参数。则切向量为

$$\mathbf{T}(s) = \left(x'(s), y'(s)\right),$$

逆时针方向旋转$\frac{\pi}{2}$，得到相对法向量为

$$\mathbf{N}_r(s) = \left(-y'(s), x'(s)\right).$$

注意三维情况定义 $\mathbf{N}(s)$ 时我们是按"往那边弯曲就指向哪边"的原则来定义的。所以 $\mathbf{N}_r$ 和 $\mathbf{N}$ 有可能相同，也可能差一个负号。

相对曲率

由相对法向量可以定义“相对曲率”：

$$\kappa_r \equiv \mathbf{N}_r \cdot \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}$$

显然它可能和三维情况定义的 κ 相同，也可能差一个负号。容易看出来，相对曲率可以写成行列式的形式

$$\kappa_r = \begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) \\ x''(s) & y''(s) \end{vmatrix}$$

它可正可负，而之前定义的 $\kappa = |\kappa_r|$ 一定非负.

相对曲率

对一般的参数形式表示的平面曲线 $(x(t), y(t))$，相对曲率可以写成

$$\kappa_r = \frac{1}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{3/2}} \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}$$

平面曲线的 Frenet 方程

平面曲线的 Frenet 方程也变得非常简单：

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa_r\\ -\kappa_r & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}_r\end{pmatrix}$$