

Cosmology

§8 Big-Bang Nucleosynthesis and Ionization History

Lecturer: 黄志琦

<http://zhiqihuang.top/cosm>

一个疑问的回顾

我们之前说因为宇宙膨胀，中微子和正负电子在大约 1.5 MeV 的温度附近脱耦，现在我们对这个脱耦温度来给出一个大致量级的估算。

散射截面

学习过量子场论(🧐🧐)的你一定记得散射截面的概念——从经典物理的观点看，它可以看成粒子能够发生碰撞的有效截面积大小。

在很多数情况下，粒子(1,2)散射生成两个粒子(3,4)的散射截面 σ 和相对速率 v 的乘积可以这样估算数量级：

$$\sigma v \sim \frac{\lambda^2 E_1 E_2 E_3 E_4}{E_{\text{prop}}^4 E_{\text{tot}}^2}.$$

这里 λ 是无量纲耦合常数， E_{prop} 是传播子能量量级， $E_{\text{tot}} = E_1 + E_2 = E_3 + E_4$ 是入射粒子(或出射粒子)总能量。

中微子脱耦温度的估算

辐射为主的时期，哈勃参数 $H \sim T^2/m_P$ ，这里 $m_P \sim 10^{19}$ GeV 是Planck质量。（推导用到能量密度 $\rho \sim T^4$ 以及第一个Friedmann 方程）

在宇宙年龄时间尺度($\sim H^{-1} \sim m_P/T^2$)内，一个轻子（电子或中微子）的散射截面扫出的空间体积 $V \sim \sigma v H^{-1}$ 内遇到能够发生散射的轻子的个数大约是

$$N_{\text{scatter}} = nV \sim T^3(\sigma v H^{-1}) \sim \sigma v T m_P$$

这里 T 是宇宙辐射温度。

电子、中微子的散射属于弱相互作用，其无量纲耦合常数大约是0.03，传播子能量尺度是 $E_{\text{prop}} \sim 10^2$ GeV，所有入射出射粒子能量尺度大概率都是 $\sim T$ 的量级。因此

$$\sigma v \sim \frac{(0.03)^2 T^4}{(10^2 \text{ GeV})^4 T^2} \sim \frac{T^2}{10^{11} \text{ GeV}^4}.$$

中微子脱耦温度的估算(续)

于是得到

$$N_{\text{scatter}} \sim \frac{T^3 m_p}{10^{11} \text{ GeV}^4} \sim \frac{10^8 T^3}{\text{GeV}^3}$$

当 $N_{\text{scatter}} < 1$ 时（跨越宇宙年龄也碰不到一个好友，只能孤独终老），中微子和正负电子就脱耦了。因此估算出脱耦温度大致为 $10^{-8/3} \text{ GeV} \approx 2 \text{ MeV}$ ，这离精确值 1.5 MeV 相差并不远。

（但没什么好高兴的，只是一堆 π 啥的抵消后的好运气而已。）

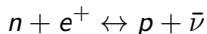
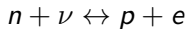
原初核合成

${}^4\text{He}$ 核个数 : H核个数 $\approx 1 : 12$

中子-质子的热平衡

我们之前对正反中微子、正反电子、和光子的恋爱史演化史有了一些了解，这次我们来聊聊中子和质子。

当宇宙处于极高温时，下列(弱相互作用)反应维持了中子和质子的热平衡：



这时中子个数和质子个数之比遵循玻尔兹曼分布：

$\frac{N_n}{N_p} = e^{-\frac{\Delta M}{T}}$ 。这里 T 是温度， $\Delta M = 1.293 \text{ MeV}$ 是中子-质子质量差。

中子-质子脱耦

中子-质子脱耦和中微子-正负电子脱耦的原理都差不多，重复上述估算过程可以得到结果仍然在 MeV 的量级。

更精确的半定量估算可以参考Mukhanov大佬的书，结果是 0.84 MeV。这时按照平衡分布的话，中子个数和质子个数之比大约是 $e^{-\frac{1.293 \text{ MeV}}{0.84 \text{ MeV}}} = 1 : 5$ 。但和中微子脱耦的情况类似，这时用平衡分布来计算其实是有些误差的。更精确的数值计算给出脱耦时中子个数和质子个数之比大约是 1 : 6。

脱耦时裸中子还未形成氦原子，还会继续通过 β 衰变 $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$ 缓慢变少。两百多秒后，大部分中子都组成了稳定的⁴He原子核，宇宙中中子和质子的数目比就稳定在了大约 1 : 7 的比例。

轻元素形成

经过一系列令人头秃的复杂过程(此处省略五千行代码...), 中子和质子依次先形成 D 核, ${}^3\text{He}$ 核, ${}^4\text{He}$ 核。因为 ${}^4\text{He}$ 很稳定, 再形成更重的元素有亿点点费劲。所以最终大部分中子都跑到了 ${}^4\text{He}$ 里面。

按照中子和质子 $1:7 = 2:(2+12)$ 的比例, 2个中子和2个质子组成一个 ${}^4\text{He}$ 核, 12个质子找不到中子组队只好游离着做单身狗 H 核。 ${}^4\text{He}$ 核和 H 核个数之比就是 $f_{\text{He}} \approx \frac{1}{12}$; 氦元素和氢元素的质量比就大约是 $1:3$ 。通常用一个氦丰度参数 Y_P (氦元素质量占有所有元素质量比重) 来描述这个结果

$$Y_P \approx \frac{1}{1+3} = 0.25$$

目前为止这和观测符合得很好。

Y_P 和 f_{He} 的关系

Y_P 代表原初氦核的质量占比， f_{He} 代表原初氦核和氢核的个数之比；两者之间的关系是：

$$Y_P = \frac{f_{\text{He}} m_{\text{He}}}{m_H + f_{\text{He}} m_{\text{He}}} = \frac{f_{\text{He}}}{f_{\text{He}} + 0.2518}$$

或者等价地

$$f_{\text{He}} = \frac{m_H}{m_{\text{He}}} \frac{Y_P}{1 - Y_P} = \frac{Y_P}{3.9715(1 - Y_P)}$$

(这些关系都是简单小学算术，和 Y_P 是否约等于 0.25 无关。)

宇宙电离史

氦复合→氢复合→黑暗时期→再电离→花花世界

宇宙电离史

- **Recombination**: 宇宙在大约温度为 0.5 MeV 时，大多数正反电子湮灭变成了光子。但是，由于正反物质不对称，还留下了大约占比为 $\sim 10^{-9}$ 比例的电子。当宇宙温度继续下降到了几千 K 时，这些电子相继和氦原子核以及氢原子核结合，形成了中性原子——这个过程叫做宇宙复合——这个名字起得很烂，因为电子和原子核之前从来没有在一起过（第一次结婚就叫复婚？）。
- **The Dark Era**: 由于没了自由电子的散射，光子就可以直线通行，也就是说，宇宙在红移1000处变得透明。但这透明的宇宙可能和你想象中有所不同——因为没有光子和任何东西发生散射，我们今天无法直接观测这部分宇宙的信息——透明的宇宙也是黑暗的宇宙。
- **Reionization**: 又过了大约十亿年，宇宙中的物质在引力作用下结团，开始频繁形成恒星等天体。这些天体发射出的高温光子又把大多数原子给电离了，宇宙再次变得不那么透明——这叫做宇宙再电离——这名字还凑合（嗯，把“第一次分手”叫做“再单身”显得更喜庆）。

Ionization fraction X_e

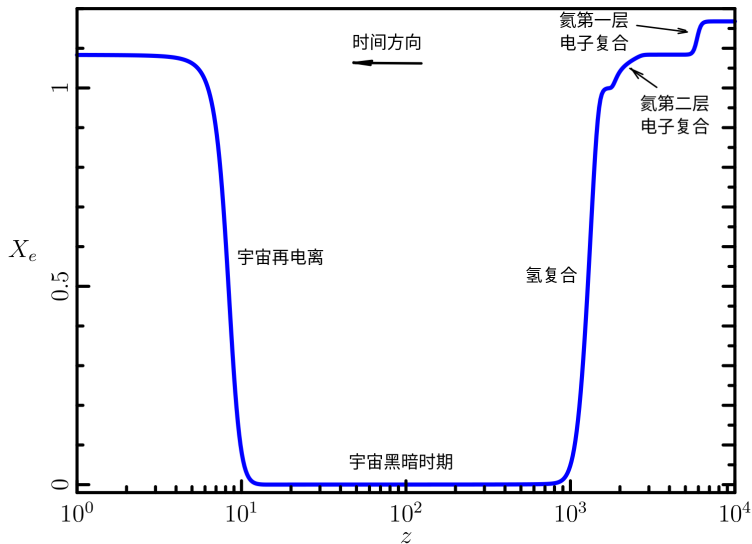
不知道是出于历史的原因还是为了写方程方便，宇宙学里的电离率 X_e 被定义为自由电子个数和氢原子核（即电离的质子或非电离的氢原子）个数之比：

$$X_e \equiv \frac{n_e}{n_H}.$$

定性分析 X_e 变化史

- 一开始，所有原子都是电离的，自由电子和质子总数相等；但记得14个质子里面只有12个属于氢核吧，这时 $X_e \approx \frac{14}{12} = 1.167$ 。
- 当氦原子内层电子被俘获之后，14个电子也只剩下13个自由了，这时 $X_e \approx \frac{13}{12} = 1.083$ 。
- 随后氦原子外层电子也被束缚住，14个电子只剩下12个自由，这时 $X_e = \frac{12}{12} = 1$ 。
- 随后氢原子的电子也被束缚，几乎没有了自由电子，这时 $X_e \approx 0$ 。
- 随后，在红移10左右，宇宙再电离；但氦原子内层电子太难电离，所以大致是回到了第二步 $X_e \approx 1.083$ 的状态。

RECFAST代码数值计算结果



RECFAST

我们来详细研究下 $X_e(z)$ 到底是怎么算的

玻尔兹曼分布

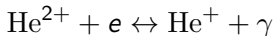
在温度 $T \ll \text{MeV}$ 时，不管是核子还是电子都是非相对论性的，而且其粒子数密度都远小于 T^3 的量级。所以不管是费米分布还是玻色分布都退化为玻尔兹曼分布，其粒子数密度为：

$$n = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m-\mu}{T}}$$

这里的 g 是内禀自由度个数， m 是质量， μ 是化学势。
(好了别使劲翻你的热学书了，这东西会点高斯积分就能推出来！)

He内层电子复合: Saha近似

随便举个栗子, 考虑 He 的内层电子复合过程:



左右两边粒子的静止质量差, 也就是 He 内层电子的束缚能, 是 $B_{\text{He}^{2+}} = 54.4 \text{ eV}$ 。对平衡态的玻尔兹曼分布, 可算出

$$\frac{n_{\text{He}^{2+}} n_e}{n_{\text{He}^+}} = \frac{g_{\text{He}^{2+}} g_e}{g_{\text{He}^+}} \left(\frac{T m_e}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{B_{\text{He}^{2+}}}{T}}$$

对给定的 $\Omega_b h^2$ (可以推算出总重子数和 T^3 的比例关系) 和 Y_p , 可以推算出 $n_{\text{He}^{2+}} + n_{\text{He}^+}$ 的值以及 $n_e + n_{\text{He}^+}$ 的值, 因此可以完备地解出 n_e 如何随 T 变化。

这种计算方法称为 Saha 近似。实际上, He 的内层电子复合就是这样计算的。

RECAST代码

对 He 外层电子复合以及 H 复合则要复杂很多。过程后半阶段偏离平衡分布比较多，Saha近似完全不适用。特别是H复合的计算，涉及了H的多个能级之间跃迁过程。精确计算的数值代码比较大（也许重点是慢）。

于是大牛们想了个近似计算的办法，把一堆高能级当成单个“连续态”。这样虽然不准确，但是写出演化方程后，给方程里加个“fudge因子”就可以进行很好的修正。这个“fudge”因子由精确（但很慢）的数值计算获得（但它对宇宙学不敏感，只要算一次就可以一直用了）。一般认为这个近似算法可以把氦和氢复合的 $X_e(z)$ 算到 0.1% 的精度。

进行这个计算的代码叫 **RECAST**。

Warning: RECAST不包含红移10左右的宇宙再电离（这个目前还没法从第一原理计算，通常是近似取个tanh 函数之类的唯象地处理）。

Reionization 唯象模型

$$\tau = \int n_e \sigma_T c dt$$

光深 (Optical Depth)

一个光子在时间 dt 可以刷出 $\sigma_T c dt$ (σ_T 是 Thomson 散射截面) 的体积, 在这个体积里能碰到的电子数就是 $n_e \sigma_T c dt$ (如果 dt 很小, 这个数就远小于 1), 它不被任何电子散射的概率是

$$1 - n_e \sigma_T c dt \approx e^{-n_e \sigma_T c dt}$$

如果一个光子处于 Dark Era, 那么它中途不撞电子爽, 一直不撞一直爽, 最后到达银河系的概率是

$$e^{-\int_0^{z^*} n_e \sigma_T c dt}$$

这里的积分我们定义为再电离光深(optical depth):

$$\tau \equiv \int_0^{z^*} n_e \sigma_T c dt$$

积分限 z^* 要取在再电离之前, 可以取比如说 $z^* = 50$.

再电离唯象模型

通常认为宇宙再电离是比较快地从 $X_e \approx 0$ 到 $X_e \approx 1 + f_{\text{He}}$ 的过程，因此用一个 \tanh 函数来近似描述：

$$X_e(z) = \frac{1 + f_{\text{He}}}{2} \left\{ 1 + \tanh \left(\frac{2 \left[(1 + z_{\text{re}})^{3/2} - (1 + z)^{3/2} \right]}{3\sqrt{1 + z_{\text{re}}}\Delta_{\text{re}}} \right) \right\}$$

这个唯象模型包含两个参数 z_{re} （再电离红移）和 Δ_{re} （再电离红移跨度）。一般会取定 $\Delta_{\text{re}} = 0.5$ （这是根据观测线索估摸着大概取的，实际上这就够了，因为 Δ_{re} 的精确值对宇宙学各种观测量影响都几乎可以忽略）。

取定 Δ_{re} 后，再电离光深 τ 就和 z_{re} 建立了单调映射的关系。在宇宙学各种计算中，把 τ 作为参数是常见的做法。因此我们需要掌握如何从 z_{re} 计算 τ 以及如何从 τ 反解 z_{re} 。

计算 $X_e(z)$ 的python代码

市面上的RECFAST很容易搜索到，但是是Fortran77或者C写的（也有本质是Fortran，安装后可以从python黑箱调用的）。我把RECFAST改写为更易读（也易修改）的python版本，并加入了再电离的唯象模型。

<http://zhiqihuang.top/cosm/codes/cosmoion.py>

标准的RECFAST使用 Λ CDM模型。而在这个python版本里我已经顺手把宇宙学模型扩展为 w_0-w_a 模型了。