Cosmology

§6 Extended Cosmological Models

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/cosm

wCDM模型

$$\rho_{\mathrm{DE}} \propto a^{-3(1+w)}$$

宇宙学常数面临的疑难

宇宙学常数(真空能) Λ 作为暗能量的标准解释，看起来既高大上又对得上绝大多数观测数据，美滋滋。但其实，它至少面临着两个理论难题：

- fine tuning problem: 按照量子场论预言的真空能至少也得是 TeV^4 的量级，和实际观测到的 meV^4 差了那么亿点点。
- coincidence problem: 按照 ΛCDM 模型，在宇宙演化历史中 ρ_m 至少变化了几十个数量级，而 ρ_Λ 不变。那为什么目前 ρ_m 和 ρ_Λ 是同一数量级的呢?

wCDM

既然 ΛCDM 未必稳，那么就搞亿点点事情?

最不废脑子的办法就是假设暗能量是状态方程（压强和密度之比）为常数 w 的，和其他成分仅有引力相互作用的未知流体。这个模型称为wCDM模型。

wCDM 的基本计算

请先用能量守恒证明 wCDM 模型里的暗能量密度:

$$\rho_{\rm DE} \propto a^{-3(1+w)}$$

然后证明

$$H(z) = H_0\sqrt{\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_{\rm DE}(1+z)^{3(1+w)}}$$

（各种距离，共动体积等的表达式，只要替换掉 $H(z)$，其余全都不用变。）

w_0-w_a 模型

$$\rho_{\mathrm{DE}} \propto e^{-3[(1+w_0+w_a)\ln a+w_a(1-a)]}$$

w_0-w_a 模型

等等，刚才你为什么假设暗能量的状态方程是一个常数?

 为了省脑子……

除了常数之外，最不废脑子（这是重点）的就是线性函数。在w_0-w_a模型（有时也按三位提出者Chevallier-Polarski-Linder命名为CPL模型) 里，假设暗能量的状态方程为

$$w_0 + w_a(1-a)$$

这里的 w_0, w_a 为常数， a 是尺度因子。

（显然，wCDM 模型也可以看成 CPL模型里 $w_a = 0$ 的特殊情形。）

w_0-w_a 模型的基本计算

请先用能量守恒证明 w_0-w_a 模型里的暗能量密度:

$$\rho_{\rm DE} \propto e^{-3[(1+w_0+w_a)\ln a+w_a(1-a)]}$$

然后证明

$$H(z) = H_0\sqrt{\Omega_r(1+z)^4+\Omega_m(1+z)^3+\Omega_k(1+z)^2+\Omega_{\rm DE}e^{3\left[(1+w_0+w_a)\ln(1+z)-w_a\frac{z}{1+z}\right]}}$$

（各种距离，共动体积等的表达式，只要替换掉 $H(z)$，其余全都不用变。）

一般的 $w(a)$ 函数

对一般的 $w(a)$ 函数，有

$$\rho_{\rm DE} \propto e^{3\int_a^1 \frac{1+w(u)}{u}du}$$

以及

$$H(a) = H_0\sqrt{\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_{\rm DE}\exp\left[3\int_a^1 \frac{1+w(u)}{u}du\right]}$$

（各种距离，共动体积等的表达式，只要替换掉 $H(z)$，其余全都不用变。）

Cosmic Neutrino Background

刚才省下的亿点点脑细胞都得废在这里了！

中微子、正负电子和光子的一段往事

大爆炸之后的宇宙，宇宙怡然自得地，一边自我膨胀，一边给自己降温……

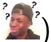
1. 快乐大家庭: 一开始，正负电子、光子、中微子等互相散射，处于热平衡（因此有共同的温度）。
2. 中微子不跟大家玩了: 宇宙膨胀导致碰撞率快速下降，当温度降到大约 $\lesssim 1.5\text{MeV}$ 时，正反中微子之间，以及中微子和正负电子之间基本不再有散射（中微子脱耦）。不过，中微子的温度仍然和光子-正负电子气体的温度保持一致（因两者都按照 $T \propto a^{-1}$ 演化）。
3. 正负电子挂了: 不久之后，当温度降到电子的静止质量 $(\approx 0.5\text{MeV})$之下时，从光子产生正负电子也变得非常困难。绝大部分正电子和电子都湮没为光子，消失在历史的长河中……在这一步，正负电子把它们的~~功力~~熵传递给了光子，导致光子温度骤然上升，超过了中微子的温度。
4. 一切又归于平静: 在绝大部分正负电子湮灭之后，光子和中微子的温度比例就一直保持不变了，都是按 $T \propto a^{-1}$ 的规律变化。

这个故事的一些细节的说明

1. 脱耦温度的精确计算有亿点点难（量子场论II，8课时走起），不过估算数量级并不难，我们之后会回顾这个问题。
2. 脱耦的有三代中微子和反中微子；因为中微子不直接参与电磁相互作用，不存在“正反中微子湮灭为光子”的情况。(高能的正反中微子能湮灭为正负电子，但脱耦后后这个很难发生了）
3. 脱耦的三代中微子和反中微子都只有一个内禀自由度。因为中微子都是左手征的，反中微子都是右手征的。
4. 因为正反物质不对称，正负电子湮灭之后还留下了（相对于湮灭前而言）极少量电子，后续上演了各种（可能再次导致你萌生退课念头的）好戏，但它们拥有的熵和光子相比有亿点低（字面意思），所以不会影响光子整体的平均温度。
5. 中微子也可能存在$\sim \frac{\mu}{T} \lesssim 10^{-9}$ 量级的正反粒子不对称。我们在后续计算中将忽略这么微小的差异，丢掉化学势 μ。

为了计算正负电子湮灭后光子温度和中微子温度之比，我们来回顾一下玻色子（光子）气体和费米子（中微子）气体的熵——

玻色分布和费米分布：分布函数

你显然记得()热统课里的（无势能，非极端简并的情况下）玻色分布和费米分布

$$\frac{dn}{dp} = \frac{g}{2\pi^2}\frac{p^2}{e^{\frac{\sqrt{p^2+m^2}-\mu}{T}} \mp 1}$$

这里的 m 是静止质量，μ 是化学势, p 是动量大小，dn 是分布在 p 和 $p+dp$ 间的粒子数密度, g 是粒子内禀自由度个数（例如，光子的 $g=2$，因为它有两种螺旋度）。$-$对应玻色子，$+$对应费米子。

也可以把它们写成单位能量区间的分布：

$$\frac{dn}{d\epsilon} = \frac{g}{2\pi^2}\frac{\epsilon\sqrt{\epsilon^2-m^2}}{e^{\frac{\epsilon-\mu}{T}} \mp 1}, \quad (\epsilon \geq m)$$

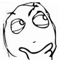
玻色分布和费米分布：粒子数密度

对 $d\epsilon$ 积分可以得到粒子数密度：

$$n = \frac{g}{2\pi^2}\int_m^\infty \frac{\epsilon\sqrt{\epsilon^2 - m^2}d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon-\mu}{T}} \mp 1} = gK_\mp(1, \frac{m}{T}, \frac{\mu}{T})T^3.$$

这里的函数

$$K_\mp(n, \alpha, \beta) := \frac{1}{2\pi^2}\int_\alpha^\infty \frac{x^n\sqrt{x^2 - \alpha^2}}{e^{x-\beta} \mp 1}dx$$

( emm，这个积分看起来有亿点点难)

玻色分布和费米分布：能量密度和压强

以 ϵ 为权重积分可以得到能量密度：

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2}\int_m^\infty \frac{\epsilon^2\sqrt{\epsilon^2 - m^2}d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon-\mu}{T}} \mp 1} = gK_\mp(2, \frac{m}{T}, \frac{\mu}{T})T^4.$$

以 $\frac{p^2}{3\epsilon}$ 为权重积分可以得到压强（思考下为什么）：

$$P = \frac{g}{3}\left[K_\mp(2, \frac{m}{T}, \frac{\mu}{T}) - \left(\frac{m}{T}\right)^2 K_\mp(0, \frac{m}{T}, \frac{\mu}{T})\right] T^4.$$

NOTES: 对于零质量粒子，可以立即在上面的结果中验证 $P = \frac{1}{3}\rho$

玻色分布和费米分布：熵密度

根据自由焓（也叫Gibbs自由能）的定义：

$$G = U - TS + PV$$

这里 U 是内能，V 是体积；以及化学势μ是粒子平均自由焓，就有

$$n\mu = \rho - Ts + P$$

这里 ρ, s 分别是单位体积的能量密度和熵密度。这样可以解出：

$$s = g\left[\frac{4}{3}K_{\mp}(2, \frac{m}{T}, \frac{\mu}{T}) - \frac{1}{3}\left(\frac{m}{T}\right)^2 K_{\mp}(0, \frac{m}{T}, \frac{\mu}{T}) - \frac{\mu}{T}K_{\mp}(1, \frac{m}{T}, \frac{\mu}{T})\right] T^3$$

平衡态玻色气体和费米气体的粒子数密度，能量密度，压强和熵密度的公式总结如下：

$$
\begin{aligned}
n &= gK_{\mp}(1, \frac{m}{T}, \frac{\mu}{T})T^3; \\
\rho &= gK_{\mp}(2, \frac{m}{T}, \frac{\mu}{T})T^4; \\
P &= \frac{g}{3}\left[K_{\mp}(2, \frac{m}{T}, \frac{\mu}{T}) - \left(\frac{m}{T}\right)^2 K_{\mp}(0, \frac{m}{T}, \frac{\mu}{T})\right] T^4; \\
s &= g\left[\frac{4}{3}K_{\mp}(2, \frac{m}{T}, \frac{\mu}{T}) - \frac{1}{3}\left(\frac{m}{T}\right)^2 K_{\mp}(0, \frac{m}{T}, \frac{\mu}{T}) - \frac{\mu}{T}K_{\mp}(1, \frac{m}{T}, \frac{\mu}{T})\right] T^3.
\end{aligned}
$$

这里

$$K_{\mp}(n, \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{\alpha}^{\infty} \frac{x^n\sqrt{x^2-\alpha^2}}{e^{x-\beta}\mp 1}dx$$

约定玻色子取 K_-，费米子取 K_+。

别忙着点退课键

好消息是：就本课程的目的而言，我们只要会算 $m = \mu = 0$ 的最简单情况就可以了。

(之所以完整地讲这些，是考虑到万一你要研究原初重子数生成等秃头课题呢……)

$K_{\mp}$的一些特殊值

用围道积分或者任何 ~~令你头秃的~~你喜欢的 技巧，可以很轻松地推出

$$K_-(n,0,0) = \frac{(n+1)!}{2\pi^2}\zeta(n+2);\ \ K_+(n,0,0) = \left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)K_-(n,0,0)$$

这里的

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$$

是著名的 Riemann-zeta 函数(你在试图证明黎曼猜想时一定见过吧)。我们知道 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$，以及 $\zeta(3)=1.202056903\ldots$, $\zeta(5)=1.036927755\ldots$

极端相对论情形

在极端相对论并且无明显正反物质不对称的情形（$T \gg m, \mu$），可以近似取 $\frac{m}{T} = 0, \frac{\mu}{T} = 0$，并利用刚才给出的 $K_{\mp}(n, 0, 0)$ 的值，得到:

极端相对论零化学势玻色子,

$$
\begin{aligned}
n_{\rm boson} &= \frac{g\zeta(3)}{\pi^2} T^3; \\
\rho_{\rm boson} &= \frac{g\pi^2}{30} T^4; \\
P_{\rm boson} &= \frac{g\pi^2}{90} T^4; \\
s_{\rm boson} &= \frac{2g\pi^2}{45} T^3.
\end{aligned}
$$

极端相对论零化学势费米子,

$$
\begin{aligned}
n_{\rm fermion} &= \frac{3}{4} n_{\rm boson}; \\
\rho_{\rm fermion} &= \frac{7}{8} \rho_{\rm boson}; \\
P_{\rm fermion} &= \frac{7}{8} P_{\rm boson}; \\
s_{\rm fermion} &= \frac{7}{8} s_{\rm boson}.
\end{aligned}
$$

正负电子湮灭导致的升温

在 $T \gg \mathrm{MeV}$ 时，单位共动体积内的正负电子($g = 2 + 2 = 4$)、光子($g = 2$)的总熵是：

$$sa^3 = (4 \times \frac{7}{8} + 2)\frac{2\pi^2}{45}(aT)^3 = \frac{11}{2}\frac{2\pi^2}{45}(aT)^3$$

根据宇宙学原理，共动体积之间互间等温且没有热量的净流动，因此共动体积内的熵守恒，所以这个阶段 aT 保持不变。
当温度降到 $0.5\,\mathrm{MeV}$ 附近，正负电子（湮灭）自由度消失：

$$sa^3 = 2\frac{2\pi^2}{45}(aT)^3$$

也就是说，这时的光子气体的 aT 必须涨到之前的光子-正负电子气体的 aT (这也是中微子的 aT) 的 $\left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} \approx 1.4$ 倍，才能保持 sa^3 不变。

宇宙中微子背景(CNB)的温度

All in all, 结论就是：在正负电子湮灭之后（$T \ll 0.5\,\mathrm{MeV}$），宇宙的光子背景温度是中微子背景温度的 1.4 倍。
我们今天看到的宇宙光子背景（宇宙微波背景辐射，CMB）的温度是 $T_{\mathrm{CMB}} = 2.726\,\mathrm{K}$，由此可以推算出CNB的等效温度为：

$$T_{\mathrm{CNB}} = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_{\mathrm{CMB}} \approx 1.95\,\mathrm{K}$$

可惜的是：观测中微子背景及其困难，以目前的实验技术手段毫无希望检验这个预言。

$N_{\text{eff}} = 3.046$ 是什么鬼?

我们说脱耦留下的中微子有三代（e中微子，μ子中微子，τ子中微子），但在文献中经常看到 $N_{\text{eff}} = 3.046$. 这是因为中微子在脱耦时并不完全处于热平衡态，有个小的修正。

所以，中微子的等效 $g = 2N_{\text{eff}} = 6.092$。

Ω_r的计算

如果中微子质量可以忽略，那么可以把它当成辐射形式能量。那么光子($g=2$)能量密度:

$$\rho_{\gamma 0} = \frac{2\pi^2}{30} T_{\rm CMB}^4$$

和中微子($g = 2N_{\rm eff}$)能量密度

$$\rho_{\nu 0} = \frac{7}{8}\frac{2N_{\rm eff}\pi^2}{30} T_{\rm CNB}^4 = \frac{7}{8}\frac{2N_{\rm eff}\pi^2}{30}\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} T_{\rm CMB}^4$$

一共贡献了(Planck单位制下）：

$$\Omega_r = \frac{8\pi}{3H_0^2}\frac{\pi^2\left(1+\frac{7}{8}\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3}N_{\rm eff}\right)T_{\rm CMB}^4}{15}$$

好用的形式

把 $T_{\mathrm{CMB}} = 2.726\,\mathrm{K}$，$N_{\mathrm{eff}} = 3.046$ 代入并使用 units.py 进行普通单位制到Planck单位制的转化，得到：

$$\Omega_r = \frac{2.4748 \times (1 + 0.2271 N_{\mathrm{eff}})}{h^2} \times 10^{-5} = \frac{4.187}{h^2} \times 10^{-5}$$

这里的 h 由 $H_0 = 100h\,\mathrm{km/s/Mpc}$ 定义。

代入 $h \approx 0.7$ 可以得到 Ω_r 大约为 8.5×10^{-5}，其中光子贡献了约 60%，中微子贡献了约 40%。

晚期宇宙的中微子

你以为高能预警已经结束了？不，并没有。

中微子质量非零

前面我们假设了中微子质量可以忽略。实际上，中微子振荡实验已经确定三代中微子质量之和有个大约为 $0.06\,\mathrm{eV}$ 的下限（在质量反常排序模型中这个下限是 $0.1\,\mathrm{eV}$ 左右）。也就是说，在 $z \lesssim 100$ 的晚期宇宙，把中微子当成辐射形式能量不太靠谱。

好在这对宇宙膨胀的计算只是个小的修正：因为在红移 $z \lesssim 300$，中微子的能量占比很小（除非中微子质量远超过 $0.1\,\mathrm{eV}$ 的量级，但这会导致很多和观测的不一致性）。

中微子的动量变化规律

为了修正以前的粗糙计算，我们希望在红移 z 更加精确地计算中微子的能量密度和压强。

不妨设某个中微子的四维动量是 $(p^t, p^r, 0, 0)$，测地线方程为：

$$\frac{dp^t}{dt} + \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}\frac{(p^r)^2}{p^t} = 0$$

再利用 $(p^t)^2 - \frac{a^2}{1-kr^2}(p^r)^2 = m^2$，上式等价于 $a\sqrt{(p^t)^2 - m^2}$ 守恒。也就是说，FRW坐标系的静止观测者看到的自由粒子的三维动量大小都按 $\frac{1}{a}$ 衰减。

中微子分布函数

由于 $q \equiv ap$ 是守恒的（这里 p 是FRW坐标系的静止观测者看到的中微子三维动量大小），设脱耦时的尺度因子为 a^*，温度为 T^*，则每种中微子的分布函数都是:

$$\left(\frac{a}{a^*}\right)^3 dn = \frac{1}{2\pi^2}\frac{\left(\frac{q}{a^*}\right)^2 d\frac{q}{a^*}}{e^{\frac{q}{a^*T^*}}+1}$$

因为随着宇宙的膨胀，a^3dn 是守恒量，所以我们把 dn 乘以了 $\left(\frac{a}{a^*}\right)^3$ 以换算到脱耦时刻。

注意到 $a^*T^* = T_{\rm CNB} = 1.95\,\mathrm{K}$ (对质量不可忽略的中微子而言，$T_{\rm CNB}$ 只具有分布函数中的参数的意义)，就有

$$a^3dn = \frac{1}{2\pi^2}\frac{q^2dq}{e^{\frac{q}{T_{\rm CNB}}}+1}$$

中微子能量密度

每种中微子的能量密度 ρ 就满足

$$\rho a^3 = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{q^2 dq \sqrt{\frac{q^2}{a^2}+m^2}}{e^{\frac{q}{T_{\rm CNB}}}+1}$$

做变量替换 $x = q/T_{\rm CNB}$ 可以得到:

$$\rho a^4 = \mathrm{I}_\rho\left(\frac{ma}{T_{\rm CNB}}\right) T_{\rm CNB}^4$$

这里的

$$\mathrm{I}_\rho(\lambda) \equiv \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{x^2\sqrt{x^2+\lambda^2}}{e^x+1}dx$$

$I_\rho(\lambda)$ 的计算

当 $\lambda \ll 1$，有

$$I_\rho(\lambda) \approx \frac{7\pi^2}{240} + \frac{1}{48}\lambda^2$$

当 $\lambda \gg 1$，有

$$I_\rho(\lambda) \approx \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2}\lambda + \frac{45\zeta(5)}{8\pi^2}\frac{1}{\lambda}$$

中微子压强

每种中微子的压强 p 就满足

$$pa^3 = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{\frac{q^2}{a^2}}{3\sqrt{\frac{q^2}{a^2}+m^2}}\frac{q^2\,dq}{e^{\frac{q}{T_{\rm CNB}}}+1}$$

做变量替换 $x = q/T_{\rm CNB}$ 可以得到:

$$pa^4 = \mathrm{I}_p\left(\frac{ma}{T_{\rm CNB}}\right)T_{\rm CNB}^4$$

这里的

$$\mathrm{I}_p(\lambda) \equiv \frac{1}{6\pi^2}\int_0^\infty \frac{x^4}{\sqrt{x^2+\lambda^2}\,(e^x+1)}dx$$

$\mathrm{I}_p(\lambda)$ 的计算

当 $\lambda \ll 1$，有

$$\mathrm{I}_p(\lambda) \approx \frac{7\pi^2}{720} - \frac{1}{144}\lambda^2$$

当 $\lambda \gg 1$，有

$$\mathrm{I}_p(\lambda) \approx \frac{15\zeta(5)}{4\pi^2}\frac{1}{\lambda}$$

代码

网站上分享了简单的计算 l_ρ 和 l_p，以及考虑到中微子质量非零后的宇宙年龄、各种距离、共动体积等的计算。

为了让你读得懂代码，我牺牲了一点点精度，中微子的质量修正的计算误差只控制在千分之一左右。不过，考虑到中微子质量修正只发生在晚期宇宙，这时中微子的能量占比不超过百分之几，所以总体计算（如$H(z)$)误差大致仍控制在 10^{-5} 量级。