

Cosmology

§5 Cosmological distances

Lecturer: 黄志琦

<http://zhiqihuang.top/cosm>

光度距离 (luminosity distance)

$$d_L = (1 + z)r$$

平直时空里的天体视亮度

如果真空中静止的各向同性的天体的发光功率为 P ，那么在距离天体为 d 处的静止观测者看到天体的亮度 B 可以用观测者单位时间单位面积接收到的光的能量来表述：

$$B = \frac{P}{4\pi d^2}$$

（在广义相对论出现之前，天文的大部分知识涉及的数学大概就这难度）

宇宙学距离上的天体视亮度

对宇宙学距离的天体而言，光子会发生红移，并且光子之间的平均间隔也会被拉长。

设天体发射光子时为 t ，观测者接收光子时为 t_0 ，则光子红移和光子间平均间隔拉长导致对观测者来说的 P 等效于

$$P_{\text{eff}} = \left(\frac{a(t)}{a(t_0)} \right)^2 P$$

下一步是求等效 d_{eff} ，这其实考虑的是 FRW 坐标系里一个球面的面积。

宇宙学距离上的天体视亮度

如果以天体为 $r = 0$ 点建立FRW坐标系，则观测者的 r 坐标可以由测地线方程

$$dt^2 - a^2 \frac{dr^2}{1 - kr^2} = 0$$

导出。即

$$\int_t^{t_0} \frac{d\tau}{a(\tau)} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \arcsin(\sqrt{kr}) & , \text{ if } k > 0 \\ r & , \text{ if } k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \operatorname{asinh}(\sqrt{-kr}) & , \text{ if } k < 0 \end{cases}$$

宇宙学距离上的天体视亮度

由于 FRW 坐标系里 固定 t, r 的曲面的度规为

$$ds^2 = a(t_0)^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

所以这是一个简单的球面，其面积为 $4\pi a(t_0)^2 r^2$ 。因此我们最后得到天体的视亮度为

$$B = \frac{\left(\frac{a(t)}{a(t_0)}\right)^2 P}{4\pi a(t_0)^2 r^2} \equiv \frac{P}{4\pi d_L^2}$$

这里的“宇宙学光度距离”

$$d_L \equiv \frac{a(t_0)^2 r}{a(t)}$$

用宇宙学红移 z 来表示更加方便

按照通常的归一化约定 $a(t_0) = 1$ ，宇宙学红移 z 和 a 的关系为 $a = \frac{1}{1+z}$ 。因此

$$d_L = (1+z)r$$

这里的 z 是天体的宇宙学红移。

下面，我们把共动距离坐标 r 也写成红移 z 的函数。

假设哈勃参量 H 对 z 的依赖已知，例如在 Λ CDM 模型中很容易写出：

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_r(1+z)^4}$$

由于

$$\frac{dt}{a} = \frac{da}{a\dot{a}} = \frac{da}{Ha^2} = -\frac{dz}{H}$$

令

$$\chi(z) \equiv \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}$$

前面计算 r 的公式可以写为：

$$r = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}\chi) & , \text{ if } k > 0 \\ \chi & , \text{ if } k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-k}\chi) & , \text{ if } k < 0 \end{cases}$$

思考题



又是一道送分题

对 $\Omega_m = 0.3, \Omega_k = 0.1$ 的 Λ CDM 模型计算红移 $z = 2$ 和 $z = 1$ 处的光度距离之比。

角直径距离 (angular diameter distance)

$$d_A = \frac{r}{1+z}$$

如果换过来，以地球为 $r = 0$ 点建立FRW坐标系。同样可以推导出天体的共动坐标 r 和红移满足

$$r = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}\chi) & , \text{ if } k > 0 \\ \chi & , \text{ if } k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-k}\chi) & , \text{ if } k < 0 \end{cases}$$

这里的

$$\chi(z) \equiv \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}.$$

如果我们观测红移 z 处(即 $a = \frac{1}{1+z}$ 处)一个垂直视线方向的物理长度为 L 的尺子，它的视张角 θ 满足 $a r d\theta = L$ 。即等效的“角直径距离”为

$$d_A = ar = \frac{r}{1+z}$$

思考题



对 $\Omega_m = 0.3, \Omega_k = 0.1$ 的 Λ CDM 模型计算红移 $z = 2$ 和 $z = 1$ 处的角直径距离之比。

宇宙学测距工具

标准烛光，标准尺子，和标准汽笛

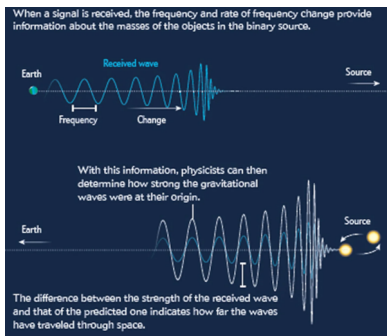
标准烛光(standard candle)和标准尺子(standard ruler)



通过观测到的不同红移处的 d_L 之比（标准烛光方法）或者 d_A 之比（标准尺子方法），可以检验宇宙学模型是否正确。

标准汽笛(standard siren)

双星合并的引力波标准汽笛也是一种标准烛光（但需要有电磁波段信号或其他方法定出红移）



引力波波形→双星质量→引力波辐射的绝对强度（和实际观测到强度对比定出光度距离）

共动体积

$$V_{\text{comoving}} = 4\pi f_{\text{sky}} \int_{z_1}^{z_2} r(z)^2 \frac{dz}{H(z)}.$$

共动体积(comoving volume)

即使你对宇宙学毫无兴趣，当你要讨论很大体积内的天体(星系, Quasar, FRB, GRB等)的分布时，你仍然需要掌握如何计算共动体积——原因是：根据宇宙学原理，如果忽略天体数密度随红移的演化，天体在共动体积内是均匀分布的。

共动体积是指固定的共动坐标 (r, θ, ϕ) 区域“目前”的物理体积，也就是：

$$V_{\text{comoving}} = a_0^3 \int \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - kr^2}} dr d\theta d\phi.$$

共动体积计算公式

我们知道全天的立体角是 4π ，通常我们无法观测全天，而只能观测占比为 $f_{\text{sky}} < 1$ 的天区面积。在该天区面积内，从红移 z_1 到 z_2 包含的共动体积是：

$$V_{\text{comoving}} = 4\pi f_{\text{sky}} \int_{z_1}^{z_2} r(z)^2 \frac{dz}{H(z)}.$$

前面我们已经介绍过如何在标准 Λ CDM模型里计算 $H(z)$ 以及 $r(z)$ ——如果你对宇宙学毫无兴趣，你已经掌握了你需要的一切，现在正是退课的绝佳时机！

NOTES: 在天文学里，天区面积经常用平方度给出，一平方度对应的 f_{sky} 是

$$\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \approx \frac{1}{41253}.$$

如果你不但对宇宙学毫无兴趣，还不会用python

下面的近似公式就是为你量身打造，但要注意：公式只适用于
 $0.2 < \Omega_m < 1$ 的平坦 Λ CDM模型里 $z \lesssim 100$ 的情况：

$$t(z) \approx \frac{6.5188h^{-1} \text{Gyr}}{\sqrt{1 - \Omega_m}} \ln \frac{\sqrt{1 - \Omega_m} + \sqrt{1 + \Omega_m(z^3 + 3z^2 + 3z)}}{\sqrt{\Omega_m}(1+z)^{3/2}}$$

$$H(z) \approx H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + (1 - \Omega_m)}$$

$$r(z) \approx \frac{6243.4h^{-1} \text{Mpc}}{\Omega_m^{0.395}} \times \left\{ \frac{1}{(1 + 0.47\Omega_m)^{0.105}} - \frac{1}{(1+z)^{0.185} [1 - \Omega_m + 1.47\Omega_m(1+z)^3]^{0.105}} \right\}$$

$$d_L(z) = (1+z)r(z)$$

$$d_A(z) = \frac{r(z)}{1+z}$$

$$V_{\text{comoving}} = \frac{4\pi f_{\text{sky}}}{3} \left\{ [r(z_2)]^3 - [r(z_1)]^3 \right\}$$