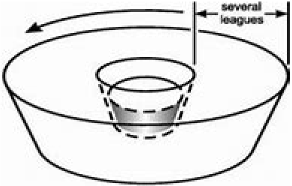
Cosmology

§3 FRW metric

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/cosm

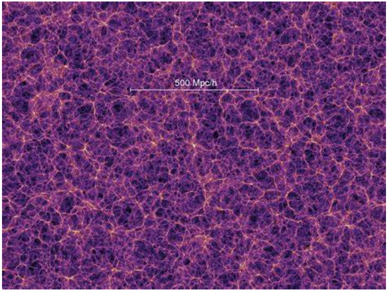
Mach的思想实验



当水桶相对宇宙的恒星/星系背景没有旋转时，离心力就消失了，这是惊人的巧合吗?

标准宇宙学的基本图像

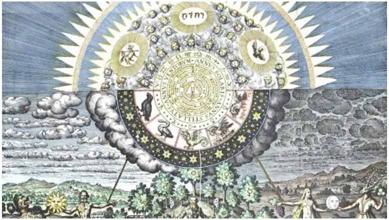
宇宙由一个非常均匀且各向同性的初始状态开始，相距很远的“测地线粒子”间的距离用标准尺子——普朗克长度来度量，不断地增大（即所谓的宇宙大爆炸）。不过，邻近的粒子间由于引力的不稳定性，逐渐结团。



虽然引力导致物质在小尺度上结团，在亿光年为单位的大尺度上看，宇宙仍然均匀和各向同性。

宇宙学基本原理(cosmological principle)

从天圆地方，到地心说，再到日心说，再到发现河外星系……一次又一次的沉重打击之后，人类基本上已经放弃了把自己置于宇宙中心的想法。



宇宙学基本原理：~~既然我们做不了宇宙中心，那谁也别想做。~~宇宙中没有任何特殊观测者，大尺度上看，宇宙均匀且各向同性。

(其实叫基本假设更合理)

FRW 度规

满足均匀且各向同性的只有
Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker 度规，有时候也简称
Friedmann–Robertson–Walker 或 FLRW 或 FRW 度规：

Lemaître 的失败可能在于英文键盘打不出他的名字......

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

这里的 $a(t)$ 是任意一个 t 的光滑函数。k 是代表着三维空间的曲率的常数。

为了书写方便，在这一讲里我们作一些约定：

- 用符号上一点表示对宇宙学时间t的导数：如 $\dot{a}$ 表示 $\frac{da}{dt}$。
- 用下标“0”表示一个参量的“目前”值。例如t_0 是“目前”的宇宙学时间。

共动坐标

由于 $\Gamma^r{}_{tt}=\Gamma^\theta{}_{tt}=\Gamma^\phi{}_{tt}=0$，如果一开始测试粒子的 $p^r=p^\theta=p^\phi=0$，则根据测地线方程

$$\frac{dp^\alpha}{dt}+\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{p^\mu p^\nu}{p^0}=0$$

这里的 $\alpha=r,\theta,\phi$，无论 μ,ν 同时为 t (这样 $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ 为零），还是 μ,ν 至少有一个不是 t（这样 $p^\mu p^\nu$ 为零)，都会使 $\frac{dp^\alpha}{dt}$ 为零。

也就是说，测地线粒子在坐标 (r,θ,ϕ) 可以一直保持“静止不动”，我们把 r,θ,ϕ 叫做“共动坐标”。

尺度因子 a 的归一化是任意的

FRW度规里的 $a(t)$ 称为宇宙学尺度因子(scale factor)。

$a(t)r$ 具有物理长度的意义。如果把 $a(t)$ 多乘一个常数，同时把 r 除以这个常数，并把 k 乘以这个常数的平方，则不改变任何物理内容。我们经常把 a_0 (今天的 a)取成 1。

空间曲率 k

用固定的宇宙学时间 t 在FRW时空切出一个三维空间，并把该时刻的 a 归一化为 1，则三维空间的度规为：

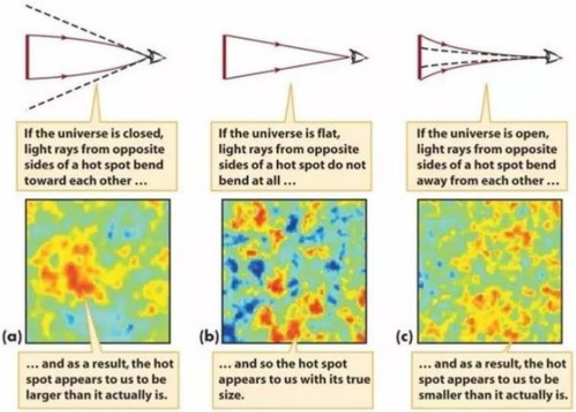
$$ds^2\big|_{3D} = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2.$$

这时可以计算出 Ricci标量为 $6k$。

我们把 $k>0$ （正曲率空间）的宇宙称为闭合宇宙(closed universe)， $k<0$ 的宇宙叫做开放宇宙(open universe)，把 $k=0$ 的宇宙叫做平坦宇宙(flat universe)。

注意“平坦”只是指空间平坦，整个四维时空还是弯曲的。

平坦宇宙和观测数据（特别是宇宙微波背景辐射数据）符合得还不错



哈勃参数(Hubble parameter)

哈勃参数的定义为：

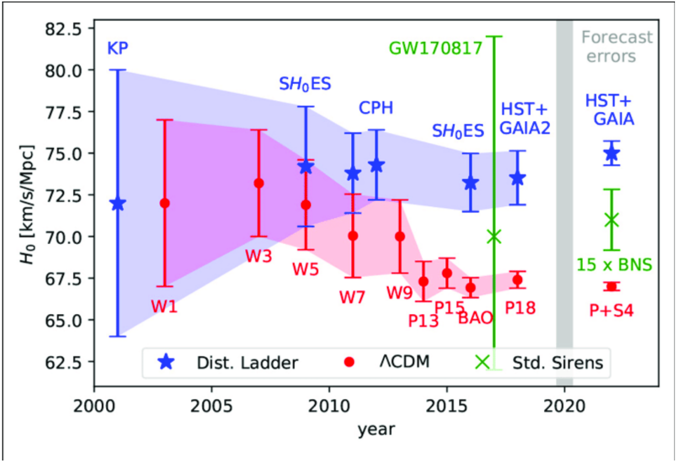
$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

在标准宇宙学里，它恒大于零（即宇宙一直在膨胀）。

H_0，也就是在 $t = t_0$ 时刻的 H，叫做哈勃常数(Hubble constant)。它大致在 70km/s/Mpc 左右。在宇宙学中，经常把哈勃常数写成 $100h\,\mathrm{km/s/Mpc}$，这里的无量纲数 h 又称为 reduced Hubble constant.

这里的长度单位 Mpc 是百万秒差距的意思，一个秒差距大约是 3.26 光年。

Hubble tension



思考题

假设一个共动观测者在 $(t_1, r_1, \theta_1, \phi_1)$ 发射了一个TA看来频率为 ν 的光子。在 $(t_2, r_2, \theta_2, \phi_2)$ 处一个共动观测者接收到光子，接收者看到光子的频率是多少?

宇宙学红移

共动观测者的四维速度为 $u_\mu = (1,0,0,0)$，因此看到的光子频率直接和光子在FRW坐标系的 p^t 成正比。光子的测地线方程（见附录的联络表达式)为:

$$\frac{dp^t}{dt} + \frac{a\dot{a}}{p^t}\left[\frac{(p^r)^2}{1-kr^2} + r^2\left(p^\theta\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(p^\phi\right)^2\right] = 0.$$

又光子走的是零测地线，所以:

$$\left(p^t\right)^2 - a^2\left[\frac{(p^r)^2}{1-kr^2} + r^2\left(p^\theta\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(p^\phi\right)^2\right] = 0.$$

于是就有

$$\frac{dp^t}{dt} + \frac{\dot{a}}{a}p^t = 0$$

它的解显然是 $p^t \propto \frac{1}{a}$。也就是说，光子的波长和 a 成正比。

宇宙学红移

宇宙学红移就定义为波长的相对变化量

$$z \equiv \frac{\lambda_{\rm obs} - \lambda_{\rm emit}}{\lambda_{\rm emit}}$$

通常观测者指的都是目前地球上的观测者。所以在宇宙学时间 t 发射出的光子的宇宙学红移为：

$$z = \frac{a_0 - a}{a},$$

这里的 $a = a(t)$ 是发射点的尺度因子。 容易看出

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1}{1+z}.$$

观测量的红移

在天文上，经常看到“这个星系的红移是z”这种说法。它的意思是：我们收集到的来自星系的光子，是星系在

$$\frac{a(t)}{a_0} = \frac{1}{1+z}$$

对应的宇宙学时间 t 时刻发出的(假设星系足够远，可以近似看成一个共动测试粒子)。

显然，z 越大，代表看到的星系越古老，离我们的距离也越远。

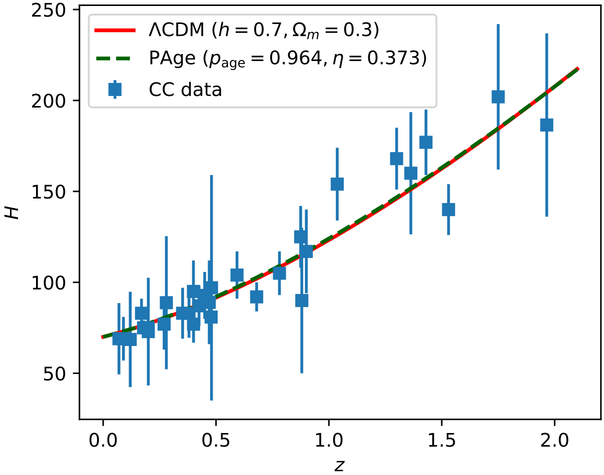
Cosmic Chronometer

如果在相近的红移处比较古老星系（这需要通过光谱对星系先做分类，排除掉年轻的星系）的平均年龄（大致方法是： 光谱 $\Rightarrow$ 金属丰度 $\Rightarrow$ 对比恒星理论 $\Rightarrow$ 年龄），那么就可以直接测量 $\frac{\Delta z}{\Delta t}$。请证明，这可以直接给出哈勃参量：

$$H \approx -\frac{1}{1+z}\frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

（这种测量哈勃参量的方法叫做 Cosmic Chronometer)

目前的 Cosmic Chronometer 数据



Friedmann Equations

如果宇宙的物质可以看成均匀的理想流体，密度为 $\rho(t)$, 压强为 $p(t)$，则爱因斯坦方程可以简化为：

$$
\begin{aligned}
\frac{k+\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho \\
\frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho+3p)
\end{aligned}
$$

这两个方程分别称为第一个和第二个 Friedmann 方程。

写个代码

FRW度规非常简单，完全可以手算各种张量

但考虑到你们~~都很懒~~学业繁忙，我决定还是写个代码：
`http://zhiqihuang.top/cosm/codes/FRW_tensors.py`

附录1：FRW度规的联络

$$
\begin{aligned}
\Gamma^t{}_{rr} &= \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \\
\Gamma^t{}_{\theta\theta} &= r^2 a\dot{a} \\
\Gamma^t{}_{\phi\phi} &= r^2 a\dot{a}\sin^2\theta \\
\Gamma^r{}_{rt} &= \frac{\dot{a}}{a} \\
\Gamma^r{}_{rr} &= \frac{kr}{1-kr^2} \\
\Gamma^r{}_{\theta\theta} &= -r(1-kr^2) \\
\Gamma^r{}_{\phi\phi} &= -r\left(1-kr^2\right)\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^\theta{}_{\theta t} &= \frac{\dot{a}}{a} \\
\Gamma^\theta{}_{\theta r} &= \frac{1}{r} \\
\Gamma^\theta{}_{\phi\phi} &= -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma^\phi{}_{\phi t} &= \frac{\dot{a}}{a} \\
\Gamma^\phi{}_{\phi r} &= \frac{1}{r} \\
\Gamma^\phi{}_{\phi\theta} &= \cot\theta
\end{aligned}
$$

附录2：FRW度规的Ricci张量和Einstein 张量

Ricci tensor:

$$R^t{}_t = -\frac{3\ddot{a}}{a}$$

$$R^r{}_r = R^\theta{}_\theta = R^\phi{}_\phi = -\frac{2k + a\ddot{a} + 2\dot{a}^2}{a^2}$$

Ricci scalar:

$$R = -\frac{6\left(k + a\ddot{a} + \dot{a}^2\right)}{a^2}$$

Einstein tensor:

$$G^t{}_t = \frac{3\left(k + \dot{a}^2\right)}{a^2}$$

$$G^r{}_r = G^\theta{}_\theta = G^\phi{}_\phi = \frac{k + 2a\ddot{a} + \dot{a}^2}{a^2}$$