Cosmology

§2 General Relativity

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/cosm

度规

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

按照惯例，我们从真空中的球形火鸡开始研究物理：

球面坐标的“度规”

我们都有在一个曲面上建立坐标系的经验，例如一个半径为 R 的球面上的点可以用球坐标系的分坐标 (θ, ϕ) 来表述。球面上很接近的两点之间的距离平方可以用

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta d\phi^2,$$

来表示。

我们把它写成矩阵形式

$$ds^2 = \begin{pmatrix} d\theta & d\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta \\ d\phi \end{pmatrix}$$

这个矩阵 $\begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$ 称为度规(metric)，约定要求它是对称矩阵，但一般情况下它不一定是对角的。

球坐标的度规

你可能已经意识到了，球坐标系下的“线元平方”

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

里也包含一个看起来不太平凡的度规

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

但是，这个情况和球面上的情况存在本质差别——

球坐标系进行坐标变换

做坐标变换 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\theta = \arccos\frac{z}{r}$, $\phi = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

在新坐标系下的度规:

#..............source code: coortrans.py ....

```
import sympy as sym
x,y,z = sym.symbols('x,y,z')
r = sym.sqrt(x**2+y**2+z**2)
theta = sym.acos(z/r)
phi = sym.acos(x/sym.sqrt(x**2+y**2))
coor = sym.Matrix([r, theta, phi])
xyz = sym.Matrix([x, y, z])
metric = sym.diag(1, r**2, r**2*sym.sin(theta)**2)
jac = coor.jacobian(xyz)
print(sym.simplify(jac.T*metric*jac))
```

....

球坐标系进行坐标变换

输出的度规矩阵是个单位矩阵，也就是

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

这显然是因为我们通过坐标变换，从球坐标系转换到了直角坐标系。

前面二维球面的例子却不一样——你知道球面是弯曲的，在上面无论如何也无法建立直角坐标系。

弯曲的时空

现在来看平直的四维时空的时空距离元平方：

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

这个度规，也就是 $\mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$ ，称为 Minkowski 度规。

在弯曲的时空中，无论你采取何种坐标系，都无法使度规是 Minkowski 度规。这时就要用到广义相对论。

Warning: 在有些文献中习惯取 $\mathrm{diag}\,(-1, 1, 1, 1)$为Minkowski度规。选哪种约定无关紧要，重要的是你从一而终。

时空坐标的标记

一般性地，四维时空可以用坐标(x^0, x^1, x^2, x^3)来标记。而 x^μ 则代表任意的坐标分量（即希腊字母 μ 可以取 $0, 1, 2, 3$ 中的任意一个）。

度规则用对称矩阵 $g_{\mu\nu}$ 来表示，这样距离元平方

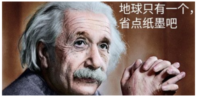
$$ds^2 = \begin{pmatrix} dx^0 & dx^1 & dx^2 & dx^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}$$

爱因斯坦求和规则

上面的矩阵乘法也可以写成求和的形式:

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

今后我们要采用爱因斯坦求和规则，就是把重复出现的、一上一下的每对指标默认求和。



那么上式就可以写成广义相对论中标准的形式

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu .$$

张量

坐稳了，我们要飚车了

协变和逆变

坐标 x^μ 的指标写在上面， 这种指标称为逆变(contravariant)指标。 度规 $g_{\mu\nu}$ 的指标写在下面，这种指标称为协变(covariant)指标。

在经典物理中，绝大多数的物理量都是用张量描述的。虽然张量是物理客观对象，但是它的“分量”（即当所有指标取确定值时对应的数）是它在坐标系里的某种形式的投影。“逆变”和“协变”只是不同的投影方式而已。

张量(tensor)的定义

在坐标变换$x \to \tilde{x}$下，如果一个带指标的量 $\tilde{T}^{\mu\nu\dots}_{\ \ \ \ \ \alpha\beta\dots}$ 的分量满足下述变化规律：

$$\tilde{T}^{\mu\nu\dots}_{\ \ \ \ \ \alpha\beta\dots} = \left(\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial\tilde{x}^\nu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\gamma}{\partial\tilde{x}^\alpha}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\tilde{x}^\beta}\cdots\right)T^{\rho\sigma\dots}_{\ \ \ \ \ \gamma\lambda\dots}$$

这个量$\tilde{T}^{\mu\nu\dots}_{\ \ \ \ \ \alpha\beta\dots}$ 就称为张量。指标的个数称为张量的阶数。零阶张量（在坐标变换下不变）也称为标量。一阶张量也称为矢量。

度规的逆变形式

度规是很特殊的一个二阶张量，我们已经熟悉了它的协变形式($g_{\mu\nu}$ 矩阵)，它的逆变形式($g^{\mu\nu}$ 矩阵)可以通过把协变形式的度规矩阵求逆得到。

也就是说，协变度规矩阵 ($g_{\mu\nu}$) 和逆变度规矩阵 ($g^{\mu\nu}$) 互为逆矩阵，用爱因斯坦求和规则写出来就是：

$$g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}.$$

这里的Kronecker符号 $\delta^{\mu}{}_{\nu}$ 是单位矩阵的矩阵元，当 $\mu = \nu$ 时取值为 1，否则取值为零。

张量指标的升降

其余张量的逆变形式和协变形式之间的转换可不是通过逆矩阵来定义的。它们的指标通过度规来升降:

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma}$$

$$T^{\mu}{}_{\nu\rho} = g^{\mu\sigma} T_{\sigma\nu\rho}$$

$$g^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$$

指标升降规则的自洽性

请自行完成下面简单事实的证明

- 把张量的任意一个指标升上去再降下来，或者降下来再升上去，都等价于没有任何操作。
- 度规张量的指标升降也可以用普通张量的指标升降规则进行。
- 度规的混合形式 $g^{\mu}_{\ \nu}$ 其实就是Kronecker符号 $\delta^{\mu}_{\ \nu}$。

张量的直积

一个m阶张量和一个n阶张量可以直接相乘生成m+n阶张量。

$dx^\mu dx^\nu$是二阶张量。
$g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}$ 是四阶张量

张量指标的收缩

张量的上下指标可以收缩，产生低两阶的张量。

$$dx^{\mu}dx_{\mu} = ds^2$$

$$g^{\mu}{}_{\mu} = 4$$

$$g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$$

思考题

如果ϕ是标量，那么$\phi_{,\mu} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$是张量吗？ $\phi_{,\mu,\nu} \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$ 呢？

（这里用逗号后面跟指标来表示对坐标的偏导是广义相对论里的常规偷懒操作）

协变微商(covariant derivative)

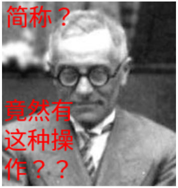
带指标的张量求普通微商(逗号后面跟指标)后一般不是张量。在弯曲的空间里有一种新的微商叫做协变微商（分号后面跟指标）可以保证张量求协变微商后还是张量。例如，逆变形式矢量的协变微商是:

$$A^{\alpha}_{\ ;\nu} = A^{\alpha}_{\ ,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\ \mu\nu} A^{\mu}$$

这里的

$$\Gamma^{\alpha}_{\ \mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda} \right),$$

它有个你记不住的名字，叫Christoffel-Levi-Civita联络， 简称 Christoffel 联络。



Levi-Civita

一般高阶张量的协变微商计算规则如下：

$$\left(T^{\mu_1\mu_2\dots}{}_{\nu_1\nu_2\dots}\right)_{;\lambda} = \left(T^{\mu_1\mu_2\dots}{}_{\nu_1\nu_2\dots}\right)_{,\lambda} + \Gamma^{\mu_1}{}_{\rho\lambda}T^{\rho\mu_2\dots}{}_{\nu_1\nu_2\dots} + \Gamma^{\mu_2}{}_{\rho\lambda}T^{\mu_1\rho\dots}{}_{\nu_1\nu_2\dots} + \dots - \Gamma^{\rho}{}_{\nu_1\lambda}T^{\mu_1\mu_2\dots}{}_{\rho\nu_2\dots} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu_2\lambda}T^{\mu_1\mu_2\dots}{}_{\nu_1\rho\dots} - \dots$$

协变微商大多数性质和普通微商一样，例如对任意张量 A, B 有

$$(AB)_{;\mu} = A_{;\mu}B + AB_{;\mu}.$$

Warning: 但是要注意高阶协变微商的次序不可随意交换。

广义相对论

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

广义相对论的两个方程

John Archibald Wheeler的著名金句：

> Matter tells spacetime how to curve, and spacetime tells matter how to move.

从实际应用的角度讲，你只需要了解广义相对论给出了两个方程：引力场方程描述了时空如何受物质的影响而弯曲；测地线方程描述了粒子在弯曲的时空中如何运动。

测地线(geodesic)方程

$$\frac{dp^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{p^\mu p^\nu}{p^0} = 0$$

这里的 $t = x^0$， p^α 是粒子的四维动量。

对静质量$m \neq 0$的粒子， $p^\alpha = m\frac{dx^\alpha}{ds}$， 这里的 ds 是前面介绍的四维时空距离间隔。因此测地线方程也可以写成

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

引力场方程

$$G^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}$$

或者等价地

$$R^{\mu\nu} = 8\pi G \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g^{\mu\nu} \right)$$

这里的 $G_{\mu\nu}$ 叫做Einstein张量，$R_{\mu\nu}$ 叫做 Ricci 张量；它们都可以用度规和度规的一阶、二阶偏导数计算出来。具体的计算公式见附录A。

$T^{\mu\nu}$ 是物质的能量动量张量，$T \equiv T^{\mu}_{\mu}$ 是它的迹。在附录B中给出了理想流体的 $T^{\mu\nu}$。

附录A：Riemann张量，Ricci张量和Einstein张量

Riemann张量定义为

$$R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\alpha,\beta} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\beta} - [\alpha \leftrightarrow \beta]$$

这里的 $[\alpha \leftrightarrow \beta]$ 表示把前面两项的 α, β 互换。
Ricci张量可以由Riemann张量导出

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho}$$

Einstein 张量可以由Ricci张量导出

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}$$

这里的Ricci标量R是Ricci张量的收缩 $R \equiv R^{\mu}{}_{\mu}$。

附录B：理想流体的能量动量张量

理想流体的能量动量张量为

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}$$

上面各个符号是这样定义的：理想流体的每一个四维时空点 x 都有一个“宏观速度” u^μ，和流体宏观速度共动的观测者看到附近的流体是各向同性的，该观测者可以测得一个能量密度 ρ 和压强 p。