Celestial Mechanics and Astrometry
天体力学和天体测量学

§4 日地系统的拉格朗日点

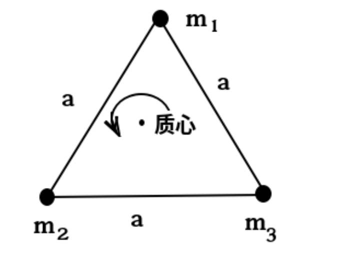
Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/cm

三体问题

一般的三体（或多体）问题复杂无规律，需要数值求解。在这一讲里我们仅讨论可以解析处理的一些特殊问题。

三体圆轨道问题

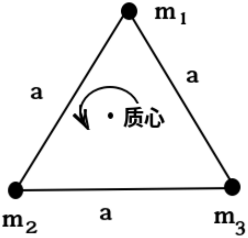


讨论：多体共面绕转问题

只考虑引力相互作用时，多个共面的质点 $m_1, m_2, \ldots m_n$ 围绕固定点 O 以同一个角速度做匀速圆周运动，证明 O 一定是这些质点的质心。

讨论：正三角形构型的三体圆轨道问题

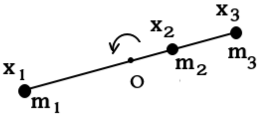
证明： 只考虑引力相互作用时，排列成正三角形的三个质点 m_1, m_2, m_3 可以在它们所在平面内绕它们的质心以角速度 $\omega = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2+m_3)}{a^3}}$ 旋转，这里 a 是正三角形的边长。



然后讨论这种运动的稳定性。

讨论：共线构型的三体圆轨道问题

只考虑引力相互作用时，排列成直线的质点 m_1, m_2, m_3 可以绕它们质心以同一个角速度旋转的充分必要条件是什么？



共线构型的三体圆轨道问题

由于受力平衡只和距离之间的比例有关，我们只要求解 m_2 和 m_3 之间的距离 与 m_1 和 m_2 之间的距离之比 $\lambda = \frac{r_{23}}{r_{12}}$。由受力平衡容易导出 λ 满足的方程为：

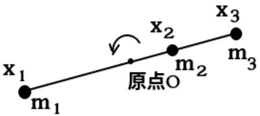
$$(m_1+m_2)\lambda^5+(3m_1+2m_2)\lambda^4+(3m_1+m_2)\lambda^3-(m_2+3m_3)\lambda^2-(2m_2+3m_3)\lambda-(m_2+m_3)=0.$$

这个方程最早由欧拉导出（却因拉格朗日发扬光大而被称为拉格朗日五次方程）。用罗尔定理容易判断，对任意的 $m_1, m_2, m_3 > 0$，这个方程都有唯一的正数解。

共线构型的三体圆轨道问题：近似方法

拉格朗日五次方程很漂亮，但是这个方程依赖于两个自由参数（m_1/m_2 和 m_3/m_2），很难找到一个简明求解的办法。于是我想了一个不同的处理方式，目的是把质量依赖先剥离出来。
取三个质点的质心为原点，并设三个质点的坐标依次为 $x_1 < x_2 < x_3$。容易根据受力平衡导出

$$\frac{x_1}{(x_2 - x_3)^2} + \frac{x_3}{(x_2 - x_1)^2} = \frac{x_2}{(x_1 - x_3)^2}. \tag{1}$$



容易根据方程两边的单调性证明，对给定的 $x_1 < 0 < x_3$，都存在 x_2 的唯一解（符号不确定，但是满足 $x_1 < x_2 < x_3$）。

共线构型的三体圆轨道问题：近似方法

令 $\alpha \equiv \frac{x_3+x_1}{x_3-x_1}$ （显然有 $-1<\alpha<1$），$\beta \equiv 1-\frac{x_2}{x_3+x_1}$ （当 x_3+x_1 趋向于零时，该极限仍然存在）。因为方程 (1) 意味着从 x_3/x_1 可以唯一确定 x_2/x_1，所以方程 (1) 实际上给出了从 α 到 β 的映射。

$$\frac{x_3}{x_1}=\frac{\alpha+1}{\alpha-1},\ \frac{x_2}{x_1}=\frac{2\alpha(1-\beta)}{\alpha-1}$$

代入 (1) 可以得到 $\beta(\alpha)$ 隐函数表达式

$$\frac{\alpha-1}{[\alpha(1-2\beta)-1]^2}+\frac{\alpha+1}{[\alpha(1-2\beta)+1]^2}=\frac{\alpha(1-\beta)}{2}. \qquad (2)$$

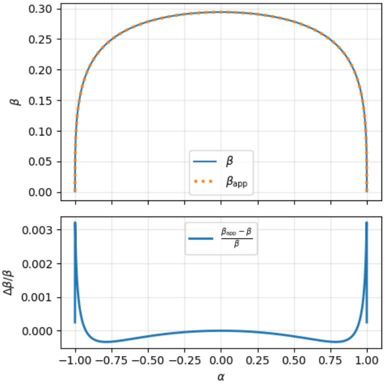
因为 α 反号不改变这个方程，所以 β 是 α 的偶函数。

共线构型的三体圆轨道问题：近似方法

$$\beta \approx \beta_{\mathrm{app}} = \left[2\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} - 1\right) + \frac{17\sqrt{17}}{5\sqrt{5}}\right]^{-2/3}. \qquad (3)$$

隐函数形式 (2) 当然还是很麻烦。为了便于处理，我在上面给出了它的一个近似解。

右图展示了 β_{app} 和 β 的对比。注意 β 始终位于 $(0, 0.3)$ 的小范围内，这为我们后面近似求解提供了方便！



共线构型的三体圆轨道问题：近似方法

现在回到原问题上来：原点为质心这个条件
$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = 0$ 可以写成

$$\alpha = \frac{\nu}{\mu + 1 - \beta}. \tag{4}$$

这里 $\mu \equiv \frac{m_1+m_3}{2m_2}$, $\nu \equiv \frac{m_1-m_3}{2m_2}$ 。
由于 $0 < \beta < 0.3 \ll 1 + \mu$，我们可以取一个“中间 β”先粗略估计 α 的值。这里我取 $\beta = \frac{1}{12}$，得到 $\alpha \approx \frac{\nu}{\mu+\frac{11}{12}}$。这个解当然很粗略。不过，知道了 α 的大致位置后，我们可以对 β 有个大致估计了。

共线构型的三体圆轨道问题：近似方法

把估计的 β 近似值（而不是随便取的中间值），即

$$\beta \approx \left[2\sqrt{3}\left(\frac{\mu+\frac{11}{12}}{\sqrt{\left(\mu+\frac{11}{12}+\nu\right)\left(\mu+\frac{11}{12}-\nu\right)}}-1\right)+\frac{17\sqrt{17}}{5\sqrt{5}}\right]^{-2/3}.$$

代入严格的方程 (4)，最终得到令我们满意的近似

$$\alpha \approx \frac{\nu}{\mu+1-\left[2\sqrt{3}\left(\frac{\mu+\frac{11}{12}}{\sqrt{\left(\mu+\frac{11}{12}+\nu\right)\left(\mu+\frac{11}{12}-\nu\right)}}-1\right)+\frac{17\sqrt{17}}{5\sqrt{5}}\right]^{-2/3}}$$

共线构型的三体圆轨道问题：近似方法

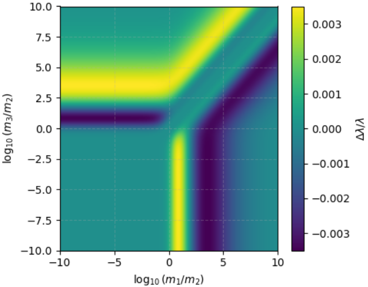
我们最后写成质量比的显示表达式，并给出 α 和距离比 $\lambda = r_{23}/r_{12}$ 的关系：

$$\alpha \approx \frac{m_1 - m_3}{m_1 + 2m_2 + m_3 - 2m_2\left[2\sqrt{3}\left(\frac{6m_1+6m_3+11m_2}{\sqrt{(12m_1+11m_2)(12m_3+11m_2)}} - 1\right) + \frac{17\sqrt{17}}{5\sqrt{5}}\right]^{-2/3}}$$

$$\lambda \approx \frac{1-\alpha\left\{1-2\left[2\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}-1\right)+\frac{17\sqrt{17}}{5\sqrt{5}}\right]^{-2/3}\right\}}{1+\alpha\left\{1-2\left[2\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}-1\right)+\frac{17\sqrt{17}}{5\sqrt{5}}\right]^{-2/3}\right\}}$$

共线构型的三体圆轨道问题：近似方法

右图给出了近似的解析解和计算机数值解的差异。最大的相对误差大约为 0.35%。

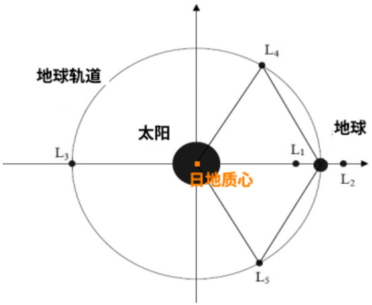


限制性三体问题

三体中如果有一个天体质量可以忽略（测试粒子），那么其实另外两个天体是做有规律的二体运动。测试粒子在二体的动态引力势中运动。

圆形限制性三体问题

当二体做圆轨道运动时，限制性三体问题变得异常简单。我们可以用这个模型来近似描述日地+人造卫星的短时间运动。取以日地质心为原点，和地球公转同步的旋转参考系。通过受力分析容易发现，测试粒子受力平衡的点有五个（拉格朗日点）。



其中 L_1，L_2 和 L_3 和日地共线；L_4 和 L_5 和日地形成正三角形。这些构型是不是很眼熟？！

讨论：拉格朗日点的计算

取地日质量比的最低阶近似，计算拉格朗日点的位置。

课后作业

- 真空中有质量分别为 m_1，m_2，m_3，m_4 的四个均匀小球。它们一开始速度均为零，且两两之间距离都是 r（远大于小球半径）。它们在引力作用下开始运动，多久后会有小球之间发生碰撞?
- 说明 L_1，L_2 和 L_3 是不稳定平衡点；并讨论日地系统的 L_4 和 L_5 的稳定性。