Celestial Mechanics and Astrometry
天体力学和天体测量学

§3 水星的近日点进动

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/cm

向心保守势下的质点运动

在平方反比的向心力场（单位质量势能 $V(r) \propto \frac{1}{r}$）中，束缚态的卫星天体的轨道是闭合的椭圆。如果势能不严格和 r 成反比，卫星天体轨道一般会偏离闭合曲线，产生近轨点进动的现象。
记单位质量的向心势为 $V(r) = -\frac{GM}{p} f\left(\frac{p}{r}\right)$，这里 p 的定义仍然是 $\frac{L^2}{GM}$，L是单位质量的角动量。注意在我们以前讨论的平凡情况下 $f(x) = x$。
能量守恒给出

$$-\frac{GM}{p} f\left(\frac{p}{r}\right) + \frac{1}{2}(v_r^2 + v_\theta^2) = E,$$

这里 E 为单位质量总能量。

向心保守势下的质点运动

利用 $v_\theta = \frac{\sqrt{GMp}}{r}$ 以及 $v_r = \frac{dr}{d\theta}\frac{v_\theta}{r}$，有

$$-\frac{GM}{p} f\left(\frac{p}{r}\right) + \frac{GMp}{2r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{GMp}{2r^2} = E$$

记 $u = \frac{p}{r}$，上式成为：

$$-f(u) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}u^2 = \frac{Ep}{GM}.$$

再两边对 θ 求导，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = f'(u).$$

向心保守势下的质点运动

在平凡情况（也就是 $f'(u)=1$）的情况下

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=1,$$

有通解

$$u(\theta)=1+e\cos(\theta-\theta_0),$$

从极坐标解 $r(\theta)\propto\frac{1}{u(\theta)}=\frac{1}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$，可以看出这里 e 是离心率，θ_0 是初始相位。

向心保守势下的质点运动

在离心率 e 比较小时，u 和 1 很接近。现在我们考虑这种情况的微扰（例如，水星的近日点进动问题），把 $f'(u)$ 在 $u=1$ 附近取一阶近似，

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = f'(1) + f''(1)(u-1).$$

整理一下得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + \left[1 - f''(1)\right] u = f'(1) - f''(1).$$

向心保守势下的质点运动

这个方程的通解是

$$u = \frac{f'(1) - f''(1)}{1 - f''(1)} \left\{ 1 + e\cos\left[\sqrt{1 - f''(1)}\,(\theta - \theta_0) \right] \right\}.$$

轨道周期变为 $\frac{2\pi}{\sqrt{1-f''(1)}}$。所以，计算近圆轨道进动的问题就简化为计算 $f(u)$ 在 $u = 1$ 的二阶导数！

水星近日点进动——金星的影响

我们先考虑离水星最近的行星——金星对水星的轨道的影响。虽然金星对水星的瞬时引力不是向心力，在长时间积分（且两者没有轨道共振）的情况下，可以认为金星的等效作用是一个在金星轨道上的均匀圆环，其半径大约为 $a_v \approx 0.723\,\mathrm{AU}$。对水星提供的单位质量势能为

$$-\frac{Gm_v}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{a_v^2+r^2-2a_v r\cos\theta}}\mathrm{d}\theta. \qquad (1)$$

这里 $m_v \approx 2.45\times 10^{-6} M$ 为金星质量。

水星近日点进动——金星的影响

对水星有 $p \approx 0.371\mathrm{AU}$，把 $r = \frac{p}{u}$ 代入太阳和金星产生的势能，得到

$$\frac{GM}{p}u + \frac{GM}{p}\frac{m_v}{M}\frac{up}{2\pi a_v}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{u^2 + \frac{p^2}{a_v^2} - 2\frac{p}{a_v}u\cos\theta}}\mathrm{d}\theta = \frac{GM}{p}f(u)$$

由此得到

$$f(u) = u + \frac{m_v}{M}g(u; \frac{p}{a_v}).$$

这里的带参数的函数

$$g(u;\lambda) \equiv \frac{\lambda u}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{u^2 + \lambda^2 - 2\lambda u\cos\theta}}$$

水星近日点进动——金星的影响

仍然记 $\lambda = \frac{p}{a_v}$，在积分号下对 u 求导可以算出：

$$f''(1) = \frac{m_v}{M}\frac{\lambda^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2(\lambda^2+1)\cos\theta - 3\lambda - \lambda\cos^2\theta}{(\lambda^2+1-2\lambda\cos\theta)^{5/2}}\mathrm{d}\theta$$

对于 $0<\lambda<1$，上述积分有个很好的近似公式

$$f''(1) \approx \frac{m_v}{M}\frac{9\lambda^3}{(1-\lambda^2)^2(6+\lambda^2)}.$$

代入 $\lambda = \frac{p}{a_v} \approx 0.513$ 和 $\frac{m_v}{M} \approx 2.45\times 10^{-6}$ 就可以得到

$$f''(1) \approx 8.8\times 10^{-7}$$

每个轨道周期的进动角为：

$$2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1-f''(1)}}-1\right)\approx\pi f''(1)\approx 0.57\,\mathrm{arcsec}$$

水星的轨道周期大概是0.24年，金星导致水星近日点每世纪内进动角大约为

$$0.57\,\mathrm{arcsec}\times\frac{100}{0.24}=240\,\mathrm{arcsec}$$

（精确的数值结果是 $277.9\,\mathrm{arcsec}$）

水星近日点进动——木星的影响

其次我们来考虑木星——虽然它离得远，但是它的质量要比其他行星大得多，所以对水星的影响不可忽略。利用木星的参数

$$\frac{m_J}{M} = 9.55 \times 10^{-4}, \lambda = \frac{p}{a_J} = 0.0713$$

可以算出

$$f''(1) \approx 5.2 \times 10^{-7}$$

因此木星的贡献大约是金星贡献的 60%，也就是导致水星近日点每世纪进动 140 arcsec 左右。（精确的数值结果是 153.6 arcsec。）

水星近日点进动——地球的影响

最后我们来考虑第三重要的地球，其参数为

$$\frac{m_E}{M} = 3.00 \times 10^{-6}, \lambda = \frac{p}{a_E} = 0.371$$

可以算出

$$f''(1) \approx 3.0 \times 10^{-7}$$

因此木星的贡献大约是金星贡献的 30% 多点，也就是导致水星近日点每世纪进动 80 arcsec 左右。（精确的数值结果是 90.0 arcsec。）

水星近日点进动——广义相对论效应

可能会让你有点吃惊：排在第四位的竟然不是火星，而是广义相对论效应！广义相对论预言的太阳产生的等效势为

$$-\frac{GM}{r}\left(1+\frac{v_\theta^2}{c^2}\right), \tag{2}$$

这里 c 为光速，$v_\theta = \frac{\sqrt{GMp}}{r}$ 是水星的切向速度分量。由此可以计算出

$$f(u) = u + \frac{GM}{pc^2}u^3 \tag{3}$$

于是

$$f''(1) = \frac{6GM}{pc^2} = \approx 1.6\times 10^{-7} \tag{4}$$

这大约是金星贡献的 17%，导致的水星近日点每世纪进动为

$$\pi f''(1)\times\frac{100}{0.24}\approx 43\,\mathrm{arcsec}. \tag{5}$$

课后作业

- 查阅火星的轨道参数，计算火星对水星近日点进动的贡献。
- 考虑到太阳具有微小的扁率。在水星轨道平面上，太阳的引力势可以近似写成

$$V(r) = -\frac{GM}{r} - J_2 \frac{GMR_\odot^2}{2r^3},$$

这里 $R_\odot = 0.00465\,\mathrm{AU}$ 是太阳的平均半径， $J_2 \approx 2 \times 10^{-7}$ 是太阳的动力学扁率系数。计算太阳扁率对水星近日点进动的贡献。