Celestial Mechanics and Astrometry
天体力学和天体测量学

§2 地球的岁差

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/cm

讨论：以质心为参考点的角动量

证明：在惯性系中，一个多质点系统相对质心的角动量的变化率等于相对质心的总外力矩。

（注意：质心可以有加速度）

讨论：潮汐力

取中心天体为原点（近似认为中心天体不动），设卫星天体的质心的位置矢量为 $\mathbf{r}$，并定义方向矢量 $\hat{r} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}$，这里的 $r \equiv |\mathbf{r}|$。
卫星天体上位置矢量是 $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ 的点（即相对质心位置矢量是 $\Delta\mathbf{r}$ 的点）单位质量所受的潮汐力定义为

$$F_{\rm tidal} \equiv -\frac{GM(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})}{|\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}|^3} + \frac{GM\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

在远场近似（$r \gg |\Delta\mathbf{r}|$）下，证明：

$$F_{\rm tidal} = \frac{GM}{r^3}\left[3(\Delta\mathbf{r}\cdot\hat{r})\hat{r} - \Delta\mathbf{r}\right].$$

讨论：绕轴180度对称的情况，不受净力矩

考虑潮汐力相对卫星天体质心施加的力矩。根据上面得到的潮汐力公式

$$F_{\rm tidal} = \frac{GM}{r^3}\left[3(\Delta\mathbf{r}\cdot\hat{r})\hat{r} - \Delta\mathbf{r}\right].$$

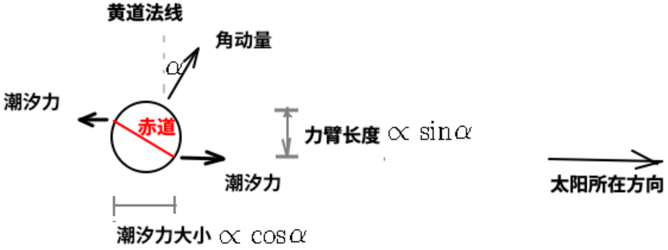
证明：如果卫星天体具有“以 $\hat{r}$为轴绕转180度后不变”的对称性，潮汐力的总力矩只能是零。（由此可以推断完美均匀球永远不受潮汐力矩。）

提示： 以质心为参考点，单位质量潮汐力产生的力矩为

$$\Delta\mathbf{r}\times F_{\rm tidal} = \frac{3GM}{r^3}(\Delta\mathbf{r}\cdot\hat{r})\Delta\mathbf{r}\times\hat{r}.$$

太阳对地球的潮汐力矩

由于自转的离心力作用，导致地球赤道微微隆起。为了简单起见，我们可以假想赤道上有个质量为 ϵM_E 的均匀环($\epsilon \ll 1$，M_E 为地球质量)。在图中标记这个质量环为红色。



夏至（或冬至）时刻，力矩达到最大 $\propto \sin\alpha\cos\alpha$

地球的岁差和章动

- **岁差（Axial precession）**：地球自转轴在惯性空间中方向的长期、单向性变化。它主要源于太阳和月球对地球赤道隆起部分产生的潮汐引力矩的长期平均效应。该效应导致地球自转轴绕黄道面法线缓慢进动，周期约为25,772年，并使春分点沿黄道西移。
- **章动（Nutation）**：叠加在岁差长期趋势之上的、一系列周期性的微小摆动。其主要激发源是日月潮汐力矩中随时间变化的部分（扣除长期平均后），变化主周期与月球轨道交点退行周期（约18.6年）一致。章动的实际观测值还包含了地球非刚体（弹性、液核等）动力学响应的信息。

作为示范性的例子，我们下面来估算太阳的潮汐力矩对地球岁差的贡献。

太阳的潮汐力矩对地球岁差的贡献

在黄道坐标系里的地球角动量方向矢量为: $\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$， 这里 $\alpha \approx 0.4091$ 为地球自转轴倾角（$23°26'$）。

我们近似把地球轨道当成半径为 r 的圆轨道。在黄道坐标系里，$\hat{r}$ 可以写成 $\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ （φ 以年为周期在 $[0, 2\pi)$ 内变化）；

对赤道上的点，$\Delta\mathbf{r}$ 可以写成 $R_E \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\cos\alpha \\ \sin\theta\sin\alpha \end{pmatrix}$ (R_E 是地球赤道半径，θ 是赤经，取遍 $[0, 2\pi)$）。

太阳的潮汐力矩对地球岁差的贡献

于是算出太阳潮汐力对赤道上的单位质量产生的力矩($\frac{3GM}{r^3}(\Delta\mathbf{r}\cdot\hat{r})\Delta\mathbf{r}\times\hat{r}$)等于:

$$\frac{3GMR_E^2}{r^3}(\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta\cos\alpha)\begin{pmatrix}-\sin\theta\sin\varphi\sin\alpha\\ \sin\theta\cos\varphi\sin\alpha\\ \cos\theta\sin\varphi-\sin\theta\cos\varphi\cos\alpha\end{pmatrix}.$$

注意对赤道上的圆环积分则相当于对 $\theta\in[0,2\pi)$ 内求平均，并乘以质量 ϵM_E。对一年内的力矩再求平均（因为岁差只考虑长期平均效应）相当于对 $\varphi\in[0,2\pi)$ 内求平均。平均后的结果是

$$\frac{3GM\epsilon M_ER_E^2}{r^3}\begin{pmatrix}-\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{4}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=-\frac{3GM\epsilon M_ER_E^2\sin\alpha\cos\alpha}{4r^3}\mathbf{n}_x.$$

太阳的潮汐力矩对地球岁差的贡献

注意到地球自转角动量可以写成 $\mathbf{J} = J\cos\alpha\mathbf{n}_z - J\sin\alpha\mathbf{n}_y$，就可以得到 $\mathbf{n}_x = -\frac{\mathbf{J}\times\mathbf{n}_z}{J\sin\alpha}$。平均力矩可以写成

$$\frac{3GM\epsilon M_E R_E^2\sin\alpha\cos\alpha}{4r^3}\frac{\mathbf{J}\times\mathbf{n}_z}{J\sin\alpha}, = \mathbf{J}\times\mathbf{\Omega},$$

这里的 $\mathbf{\Omega} = \frac{3GM\epsilon M_E R_E^2\cos\alpha}{4r^3 J}\mathbf{n}_z$。于是根据以质心为参考点的角动量定理

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{J}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{J}\times\mathbf{\Omega}.$$

这个方程描述的是 $\mathbf{J}$ 绕黄道法向以角速度 $-\Omega$ 匀速旋转（请自行验证 $\mathbf{J} = J\begin{pmatrix}\sin\alpha\cos(\Omega t)\\ -\sin\alpha\sin(\Omega t)\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$ 是方程的解）。

太阳的潮汐力矩对地球岁差的贡献

在进动角速度

$$\Omega = \frac{3GM\epsilon M_E R_E^2 \cos\alpha}{4r^3 J}$$

里，注意到$\epsilon M_E R_E^2$ 其实就是隆起部分的绕自转轴的转动惯量，而隆起部分绕赤道任意直径的转动惯量（圆环绕其直径旋转的转动惯量）为 $\frac{1}{2}\epsilon M_E R_E^2$。我们把地球这两种纵横角动量差记作$\Delta I$，也就是 $\epsilon M_E R_E^2 = 2\Delta I$。另外，$J$ 等于地球整体转动惯量 I 和自转角速度 ω 的乘积，那么

$$\Omega = \frac{3GM\cos\alpha}{2r^3\omega}\frac{\Delta I}{I}$$

考虑到月球的质量和距离立方之比大约是太阳的 2.2 倍，日月潮汐力总和大致将使得上述结果增大为 3.2 倍，再考虑到 $\cos\alpha \approx 0.917$，就有

$$\Omega_{\rm total} \sim 4.4\frac{GM}{r^3\omega}\frac{\Delta I}{I}$$

地球岁差周期

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_{\rm total}} \approx \frac{2\pi}{4.4}\frac{r^3\omega}{GM}\frac{I}{\Delta I}\,\mathrm{year}.$$

注意到 $\omega = 2\pi\frac{365}{\mathrm{year}}$，以及 $4\pi^2\frac{r^3}{GM} = \mathrm{year}^2$，就有

$$T \approx 83\frac{I}{\Delta I}\,\mathrm{year}.$$

最后我们用赤道半径（6378 km）和南北极半径（6357 km）的相对差异来估算 $\frac{\Delta I}{I} \sim 3\times10^{-3}$，得到岁差周期约为 2.5 万年。和实际周期 2.6 万年相比，我们的估算可以说是非常令人满意了。

课后作业

- 某个恒星+圆轨道行星系统中，假设无其他天体影响。行星自转周期为 0.5 天，公转周期为 2 年，自转轴和公转轴夹角为 $\frac{\pi}{3}$，赤道半径比南北极半径大 1%。估算该行星的自转轴进动周期。