Celestial Mechanics and Astrometry
天体力学和天体测量学

§1 天体力学：绪论

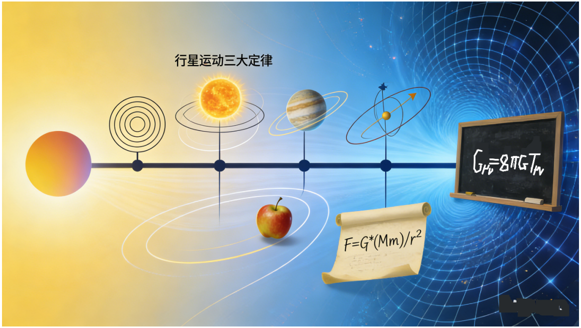
Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/cm

课程内容

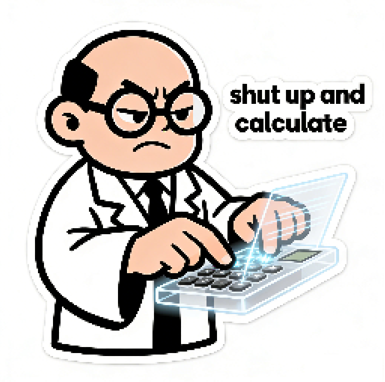
- 回顾二体问题
- 地球的岁差
- 水星近日点进动
- 日地系统的拉格朗日点
- 多质点运动的计算机模拟

课堂交互：天体力学的发展史



人物主线： 毕达哥拉斯-托勒密-哥白尼-开普勒-牛顿-（拉普拉斯，拉格朗日等一堆）-爱因斯坦-……

讨论完历史，下面该开始计算了



所谓计算，就是在坐标系里求解运动方程。

运动方程（我们基本都会）

- 牛顿第二定律 $F = ma$
- 万有引力 $F = -\frac{GMm}{r^2}$
- 偶尔还在旋转坐标系中用到离心力 $F = mr\omega^2$ 和科里奥利力 $\mathbf{F} = 2m\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}$
- 此外还有能量守恒、动量守恒和向心力系统中的角动量守恒定律

坐标系（我们基本都不会）

Code 1: 列出astropy内置的三十几种坐标系

```
from astropy.coordinates import builtin_frames;
print(builtin_frames.__all__)
```

在这些坐标系中，最常用的是：

坐标系	原点	xy平面	经度起始	主要应用场景
AltAz	观测者	观测地水平面	北	观测手动记录
ICRS	太阳系质心	地球赤道面#	春分点[a]	当前国际标准
BarycentricMeanEcliptic	太阳系质心	黄道面#	春分点[a]	太阳系研究
Galactic	观测者*	银河系盘面#	银河系中心	宇宙学研究

这些参考面都采用J2000标准。J2000大致上是2000年1月1日格林尼治正午时的状态，但并非严格如此（要从理论上去除掉周围天体造成的短期波动）。

a 春分点是赤道和黄道交点。

* 具体观测者在地球附近或者太阳系什么位置，对宇宙学研究不重要。

坐标查询和转换

Code 2: 查询火星ICRS坐标并转换到黄道坐标系

```
from astropy.coordinates import SkyCoord, BarycentricMeanEcliptic,
    get_body_barycentric
from astropy.time import Time
import astropy.units as u
now = Time.now()
mars_icrs = SkyCoord(get_body_barycentric('mars', now), frame='icrs')
mars_ecliptic = mars_icrs.transform_to(BarycentricMeanEcliptic())
print(f"observation time: {now.iso[:19]}")
print(f"mars ICRS coordinate")
print(f"RA = {mars_icrs.ra.to_string(unit=u.hourangle, sep=':', precision=2)}")
print(f"DEC = {mars_icrs.dec.to_string(unit=u.deg, sep=':', precision=1)}")
print(f"mars BarycentricMeanEcliptic coordinate:")
print(f"longitude = {mars_ecliptic.lon.to_string(unit=u.deg, sep=':', precision
    =2)}")
print(f"latitude = {mars_ecliptic.lat.to_string(unit=u.deg, sep=':', precision
    =2)}")
print(f"distance to the origin (solar system center of mass):")
print(f"ICRS: {mars_icrs.distance.to('AU'):.8f}")
print(f"BarycentricMeanEcliptic: {mars_ecliptic.distance.to('AU'):.8f}")
print(f"difference: {(mars_icrs.distance - mars_ecliptic.distance).to('km'):.3f}
    ")
```

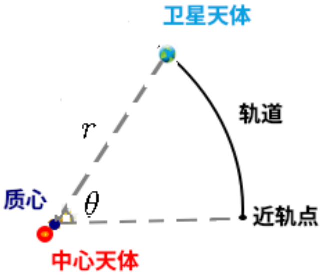
http://zhiqihuang.top/cm/codes/coordinate_transform.py

二体系统

圆锥曲线运动

课堂交互：二体系统的解

设中心天体质量为 $M_\star$，卫星天体质量为 m。在不受外力的情况下，可以取质心不动的惯性参考系，卫星天体等效于受到质心处质量为 $M = \frac{M_\star^3}{(m+M_\star)^2}$ 的质点的引力作用。我们来考虑卫星天体围绕质心的运动：

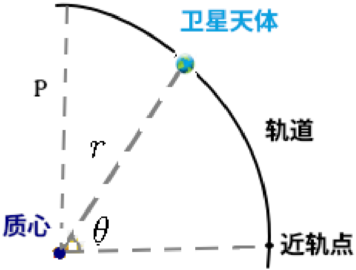


设卫星天体单位质量的角动量为 $L = \sqrt{GMp}$ （参量 p 具有长度量纲）。以质心为原点，近轨点方向为 x 轴方向，角动量方向为 z 轴方向建立三维空间坐标。在xy平面上，我们先用极坐标 (r, θ) 来标记位置，请推导如下结论：

- 卫星天体的轨道方程 $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$。(积分常数$e \geq 0$)
- 卫星天体单位质量的能量 $E = -\frac{GM(1-e^2)}{2p}$。

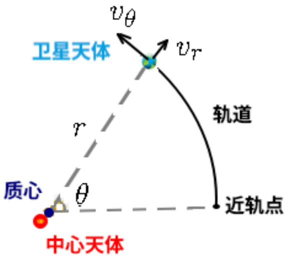
轨道是圆锥曲线

轨道方程 $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ 描述的是以原点（质心）为焦点的圆锥曲线，离心率为 e，半正焦弦（轨道在 y 轴上的截距）为 p。



离心率 $e < 1$、$e = 1$ 和 $e > 1$ 分别对应椭圆（$E < 0$ 的束缚状态）、抛物线（$E = 0$ 的临界状态）和双曲线（$E > 0$ 的非束缚状态）。

卫星天体的瞬时状态和轨道参数之间的关系



下面我们假设中心天体等效质量 M 是已知的，来看卫星天体的状态如何用不同的参数形式来表述。

从卫星天体的坐标 (r,θ) 和瞬时速度 (v_r, v_θ) 可以推导出轨道参数 p 和 e，计算顺序如下：

$$E = \frac{v_\theta^2 + v_r^2}{2} - \frac{GM}{r}.$$

$$p = \frac{L^2}{GM} = \frac{r^2 v_\theta^2}{GM}.$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2pE}{GM}}$$

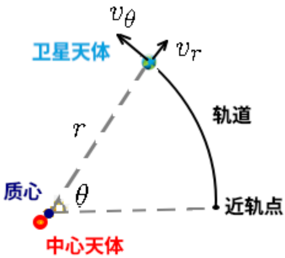
卫星天体的瞬时状态和轨道参数之间的关系

从轨道参数（ p 和 e）和角坐标 θ 也能推算出卫星天体的瞬时状态。为了更方便地表述，我们用 $\bar{v} \equiv \sqrt{\frac{GM}{p}}$ 来作为“自然速度单位”。

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}.$$

$$v_\theta = \frac{\sqrt{GMp}}{r} = \bar{v}\frac{p}{r} = \bar{v}(1 + e\cos\theta).$$

$$v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{v_\theta}{r} = \frac{er^2\sin\theta}{p}\bar{v}\frac{p}{r^2} = \bar{v}e\sin\theta.$$



用瞬时状态构造坐标系矢量

现在我们回到直角坐标系，用 $\mathbf{n}_x$, $\mathbf{n}_y$, $\mathbf{n}_z$ 分别表示单位坐标矢量。物理上看，$\mathbf{n}_x$ 为近轨点方向，$\mathbf{n}_z = \frac{\mathbf{r}\times\mathbf{v}}{|\mathbf{r}\times\mathbf{v}|}$ 为角动量方向，$\mathbf{n}_y \equiv \mathbf{n}_z \times \mathbf{n}_x$。从上面的结论可以看出：

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{v}}{\bar{v}} &= -\sin\theta\,\mathbf{n}_x + (e+\cos\theta)\mathbf{n}_y \\ \frac{\mathbf{r}}{r} &= \cos\theta\,\mathbf{n}_x + \sin\theta\,\mathbf{n}_y.\end{aligned}$$

由此可以得到：

$$e\mathbf{n}_x = \frac{\mathbf{v}}{\bar{v}} \times \mathbf{n}_z - \frac{\mathbf{r}}{r}$$

定义指向近轨点的，大小为偏心率的“偏心率矢量” $\vec{e}$，上式可以写成和坐标系无关的一个有趣等式：

$$\boxed{\vec{e} = \frac{\mathbf{v}}{\bar{v}} \times \frac{\mathbf{r}\times\mathbf{v}}{|\mathbf{r}\times\mathbf{v}|} - \frac{\mathbf{r}}{r}}$$

时间积分

我们用单位 $\tau \equiv \frac{p}{v} = \sqrt{\frac{p^3}{GM}}$ 标记时间，并把近轨点时刻记为初始时刻。容易利用角动量守恒（$\mathrm{d}t = \frac{r\mathrm{d}\theta}{v_\theta}$）计算出时间 t 满足：

$$\frac{t}{\tau} = \int_0^\theta \frac{\mathrm{d}\phi}{(1+e\cos\phi)^2}.$$

最简单的是抛物线轨道（$e=1$):

$$\frac{t}{\tau} = \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta}{2}$$

时间积分

对椭圆轨道 $(0 \le e < 1)$,

$$\frac{t}{\tau} = \frac{e\sin\theta}{(e^2-1)(1+e\cos\theta)} + \frac{2}{(1-e^2)^{3/2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

对双曲线轨道（$e > 1$):

$$\frac{t}{\tau} = \frac{e\sin\theta}{(e^2-1)(1+e\cos\theta)} - \frac{2}{(e^2-1)^{3/2}}\mathrm{arctanh}\left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

这里 $\mathrm{arctanhx} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$。注意到 $\tanh(ix) = i\tan x$，这些结果其实在解析延拓意义下等价。

时间积分的数值近似-近抛物线轨道

当 $|e-1|\tan^2\frac{\theta}{2} \ll 1$ 的时候，椭圆轨道和双曲线轨道的两个解析表达式可能会出现"零除零"的数值不稳定性。可以用下列对 $(e-1)\tan^2\frac{\theta}{2}$ 的四阶近似来代替严格的公式：

$$
\begin{aligned}
\frac{t}{\tau} \approx\ & \frac{u}{2}\left[1+\frac{u^2}{3}+(e-1)\frac{u^4-5}{5}\right.\\
&+(e-1)^2\frac{15u^6-21u^4-35u^2+105}{140}\\
&+(e-1)^3\frac{7u^8-18u^6+42u^2-63}{126}\\
&\left.+(e-1)^4\frac{105u^{10}-385u^8+330u^6+462u^4-1155u^2+1155}{3696}\right]
\end{aligned}
$$

这里的 $u=\tan\frac{\theta}{2}$.

时间积分的反向求解

在 `http://zhiqihuang.top/cm/codes/t_integral.py`中，我采用了一种通过解延拓把三种轨道统一起来的更有趣的算法。同时也给出了从 t/τ 计算 θ 的反向问题的算法。

近圆轨道近似

$$e \ll 1$$

椭圆轨道时间积分的另一种写法

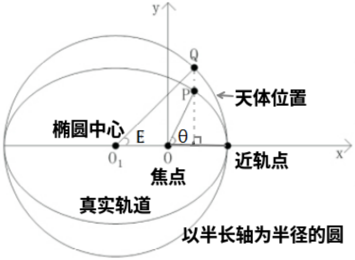
椭圆轨道的时间积分

$$\frac{t}{\tau} = \frac{e\sin\theta}{(e^2-1)(1+e\cos\theta)} + \frac{2}{(1-e^2)^{3/2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

可以写成

$$\omega t = E - e\sin E.$$

这里 $\omega \equiv \frac{(1-e^2)^{3/2}}{\tau} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$ 是平均圆频率(2π和周期之比)， $E = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$ 叫“偏近点角”(天体在半长轴为半径的大圆上的竖直方向投影)。方程左边的 ωt 叫“平近点角”（假想的匀速旋转角度），而真实的极角 θ 叫作“真近点角”。



近圆轨道近似

平近点角，偏近点角和真近点角以
$\omega t = E - e\sin E$，$\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}$ 互相联系。
在 $e \ll 1$ 的近圆轨道情况，为了便于和我们熟悉的匀速圆周运动比较，我们希望能以平近点角为变量来描述天体运动。在保留到 e^2 的近似下，

$$E \approx \omega t + e\sin(\omega t) + \frac{e^2}{2}\sin(2\omega t),$$

推导 θ 的近似表达式则稍麻烦一些。我们可以利用
$\frac{\sin E}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}$ 并假设 $\theta = E + ae + be^2$，

近圆轨道近似

$$\sin\theta \approx \left(1-\frac{a^2}{2}e^2\right)\sin E+(ae+be^2)\cos E = \sin E+ea\cos E+e^2\left(b\cos E-\frac{a^2}{2}\sin E\right).$$

$$e\cos\theta \approx e\cos E - ae^2\sin E$$

$$\frac{1}{1+e\cos\theta} \approx 1-e\cos E+e^2(a\sin E+\cos^2 E).$$

$$\begin{aligned}\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta} &\approx \sin E+e(a-\sin E)\cos E \\ &+\left[a\sin^2 E+\sin E\cos^2 E-\frac{a^2}{2}\sin E-a\cos^2 E+b\cos E\right]e^2.\end{aligned}$$

$$\frac{\sin E}{\sqrt{1-e^2}} \approx \left(1+\frac{e^2}{2}\right)\sin E.$$

容易看出来 $a=\sin E$，$b=\frac{1}{4}\sin(2E)$。

近圆轨道近似

现在我们有

$$\theta \approx E + e \sin E + \frac{e^2}{4} \sin(2E).$$

利用

$$E \approx \omega t + e \sin(\omega t) + \frac{e^2}{2} \sin(2\omega t)$$

$$e \sin E \approx e \sin(\omega t) + e^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t).$$

$$e^2 \sin(2E) \approx e^2 \sin(2\omega t).$$

就可以整理得到：

$$\boxed{\theta \approx \omega t + 2e \sin(\omega t) + \frac{5e^2}{4} \sin(2\omega t).}$$

近圆轨道近似

仍然保留到 e^2,

$$e\cos\theta = e\cos(\omega t) - 2e^2\sin^2(\omega t)$$

$$\frac{1}{1+e\cos\theta} = 1 - e\cos(\omega t) + e^2(1+\sin^2(\omega t))$$

那么利用半长轴 $a = \frac{p}{1-e^2}$ 和 $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$，有

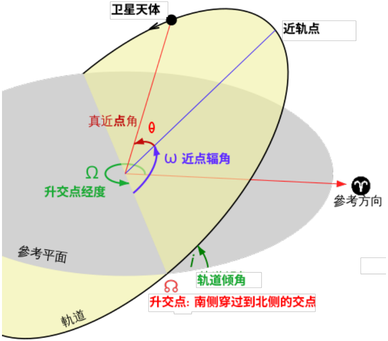
$$\boxed{r \approx a\left[1 - e\cos(\omega t) + e^2\sin^2(\omega t)\right].}$$

轨道根数

下面我们讨论一般坐标系下的轨道参数计算

轨道根数(Keplerian Elements)

当xy平面和轨道平面不一致时，我们还要用轨道倾角 i 、升交点经度 Ω 和近点辐角 ω 额外三个参数来表述轨道的朝向。参数 $(p, e, i, \Omega, \omega, \theta)$ 被称为“**轨道根数**”。



- 注意轨道根数和瞬时状态之间的转换公式需要用到中心天体等效质量 M，因此需要指定中心天体。常见的有“日心轨道根数”和“地心轨道根数”。
- i 的范围为 $[0, \pi]$
- 轨道根数不一定是这6个参数。例如对于椭圆轨道，常用半长轴 a 替代半正焦弦 p。又例如使用时间参量比较方便时，会使用“平近点角”（一个周期内假想匀速转动的角度）代替“真近点角” θ。

轨道根数到瞬时状态的换算

根据轨道根数的定义，容易得到：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r\mathbf{T}(\theta+\omega, \Omega, i)$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_r\mathbf{T}(\theta+\omega, \Omega, i) + v_\theta\mathbf{T}(\theta+\omega+\frac{\pi}{2}, \Omega, i)$$

其中 $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$，$v_\theta = \bar{v}(1+e\cos\theta)$，$v_r = \bar{v}e\sin\theta$，投影矢量 $\mathbf{T}$ 定义为

$$\mathbf{T}(\alpha,\beta,\gamma) \equiv \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma \\ \sin\alpha\sin\gamma \end{pmatrix}$$

瞬时状态到轨道根数的换算

从瞬时位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 和 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ 可以得到单位质量的角动量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ 和能量 $E = -\frac{GM}{|\mathbf{r}|} + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2$。那么有

$p = \frac{L^2}{GM}$， $e = \sqrt{1 + \frac{2pE}{GM}}$。

记坐标系方向矢量为 $\mathbf{n}_x$, $\mathbf{n}_y$ 和 $\mathbf{n}_z$，要确定描述轨道根数方向的各个角度，需要用到如下的单位矢量：

- 指向天体位置的 $\mathbf{n}_r \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}$。
- 角动量方向的 $\mathbf{n}_L \equiv \frac{\mathbf{L}}{L}$。
- 指向升交点的 $\mathbf{n}_{\rm asc} = \frac{\mathbf{n}_z \times \mathbf{L}}{|\mathbf{n}_z \times \mathbf{L}|}$。如果 $\mathbf{n}_z \times \mathbf{L} = 0$，那么表面轨道面和参考面重合，可随意地取 $\mathbf{n}_{\rm asc} = \mathbf{n}_x$。
- 指向近轨点的 $\mathbf{n}_{\rm peri} = \frac{1}{e}\left(\frac{\mathbf{v}}{v} \times \mathbf{n}_L - \mathbf{n}_r\right)$。如果偏心率为零，那么是圆轨道，可随意取 $\mathbf{n}_{\rm peri} = \mathbf{n}_r$。

瞬时状态到轨道根数的换算

剩下的就很简单：

$$\begin{aligned}
i &= \arccos(\mathbf{n}_L \cdot \mathbf{n}_z) \\
\cos\Omega &= \mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_{\rm asc}, \ \sin\Omega = (\mathbf{n}_x \times \mathbf{n}_{\rm asc}) \cdot \mathbf{n}_z \\
\cos\omega &= \mathbf{n}_{\rm asc} \cdot \mathbf{n}_{\rm peri}, \ \sin\omega = (\mathbf{n}_{\rm asc} \times \mathbf{n}_{\rm peri}) \cdot \mathbf{n}_L \\
\cos\theta &= \mathbf{n}_{\rm peri} \cdot \mathbf{n}_r, \ \sin\theta = (\mathbf{n}_{\rm peri} \times \mathbf{n}_r) \cdot \mathbf{n}_L
\end{aligned}$$

用Python包实现轨道根数和瞬时状态的换算

参考 astropy, poliastro, skyfield, pykep, orbital 等python包，向人工智能咨询它们的用法。

对我这种老年人来说，学这些太累了，不如自己写个：
`http://zhiqihuang.top/cm/codes/orbital_elements.py`

课后作业

- 二体系统问题中，如果以中心天体为参照物，讨论卫星天体的轨道和周期。
- 二体系统问题中，如果卫星天体的轨道为椭圆轨道，请证明
  - 椭圆半长轴为 $a = \frac{p}{1-e^2}$。
  - 单位质量能量 $E = -\frac{GM}{2a}$。
  - 轨道周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$.